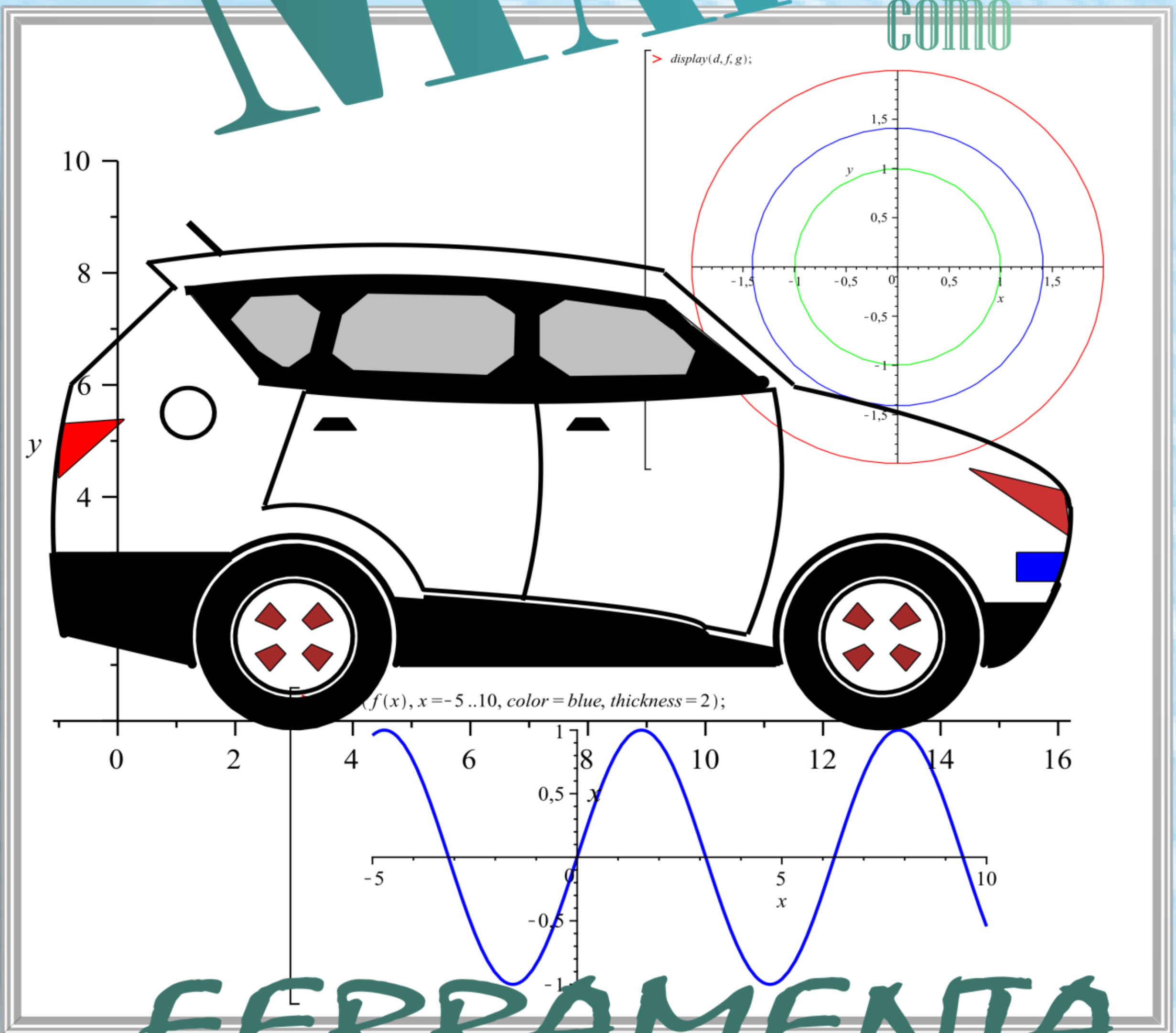
MAPLE como FERRAMENTA DE ENSINO



Profa. Rosa García Márquez

Editado por: Diogo Rangel e Ighor Opiliar Mendes

Resumo

Muitas vezes a matemática acaba levando a fama de matéria difícil no cotidiano das escolas brasileiras. Afinal, não são poucos os alunos que sofrem para aprender e professores que não vêem outra forma de ensinar, além da tradicional combinação livros, lousa e caderno. Neste contexto, a informática assume um papel de suma importância, quando colocada a serviço da educação. O computador é um instrumento excepcional que torna possível simular, praticar ou vivenciar verdades matemáticas, de visualização difícil por parte daqueles que desconhecem determinadas condições técnicas, mas fundamentais à compreensão plena do que está sendo exposto. Mas para que isso ocorra é necessário que esteja disponíveis programas educativos de qualidade e que haja uma boa articulação entre os programas, o currículo e a prática. A finalidade de este trabalho é apresentar uma introdução ao **Maple** e mostrar que é possível utilizar este aplicativo como ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem nos colégios.

Palavras-chave: Material de apoio, **Maple** no ensino médio, Arte.

Sumário

Introdução

Se a matemática é apresentada de forma arcaica e desinteressante para os alunos, dificulta a compreensão do conteúdo. Fica a cargo de o educador pensar formas de torná-la mais agradável e assim facilitar a aprendizagem, sem perda de conteúdo. Uma dessas formas são a utilização das novas tecnologias (softwares matemáticos) de modo criativo e inovador de maneira que possam auxiliar e potencializar as aprendizagens escolares.

Quando o aluno interage com o computador adquire conceitos e isso contribui para o seu desenvolvimento mental. As novas tecnologias oferecem recursos em que a representação de processos abstratos passa a ter caráter dinâmico e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito ao ensino da matemática.

É dentro deste conceito que se pretende utilizar o aplicativo Maple no ensino da matemática, para que o mesmo se constitua em uma ferramenta de apoio para a compreensão profunda dos conceitos. Através deste conhecimento os alunos serão capazes de interpretar fenômenos físicos, resolver problemas recorrendo a funções e gráficos, analisar situações reais identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução. A prática mais comum no ensino de matemática tem sido aquela em que o conteúdo é apresentado através de exposição, de forma acabada, partindo de definições, demonstração de propriedades, exemplos, seguidos de exercícios de aprendizagem e fixação, esperando-se com isso que o aluno aprenda pela reprodução.

Esse método de ensino não tem se mostrado muito eficaz, uma vez que o fato do aluno fazer a reprodução de um exercício padronizado, não quer dizer que realmente assimilou o conteúdo, podendo apenas ter realizado algo mecânico, sem sequer compreender o que está fazendo, sendo muitas vezes, incapazes de resolver problemas que se afastam das mesmas situações modelo.

As dificuldades e a falta de significados reforçam para o corpo discente a idéia de que a Matemática é complicada e cheia de obstáculos, não sendo capazes de aprendê-la. A apatia e desinteresse pela disciplina aparecem, sendo em alguns casos, seguida do fracasso escolar. Neste sentido, há um questionamento sobre o papel da Matemática na formação de nossos alunos.

Uma proposta para esta indagação é a utilização do computador como ferramenta no ensino. A informática é uma das alternativas mais interessantes no ensino moderno, principalmente aquelas que envolvem modelos matemáticos. Um dos principais objetivos do uso do computador na educação é desenvolver o raciocínio e possibilitar situações de resolução de problemas a fim de desenvolver o pensamento do aluno.

Foram desenvolvidos vários softwares nessa direção. Um deles é o Maple que possibilita a passagem de experiências gráficas e numéricas para construções analíticas mais profundas. É um software com uma linguagem de computação que apresenta quatro características:

- Aspectos algébricos;
- Aspectos numéricos;

- Aspectos gráficos;
- Aspectos de programação.

Todas essas características estão integradas formando um corpo único. Por exemplo, a partir de um resultado algébrico, uma análise numérica ou gráfica pode imediatamente ser feita. É claro que o programa não elimina completamente o uso de linguagens numéricas ou gráficas, nem dispensa a presença de um professor. Em aplicações mais elaboradas pode ser necessário usar recursos de linguagens como C ou Fortran. O **Maple** tem interface com estas linguagens no sentido de que um resultado algébrico encontrado pode ser convertido para a sintaxe da linguagem C ou Fortran 77.

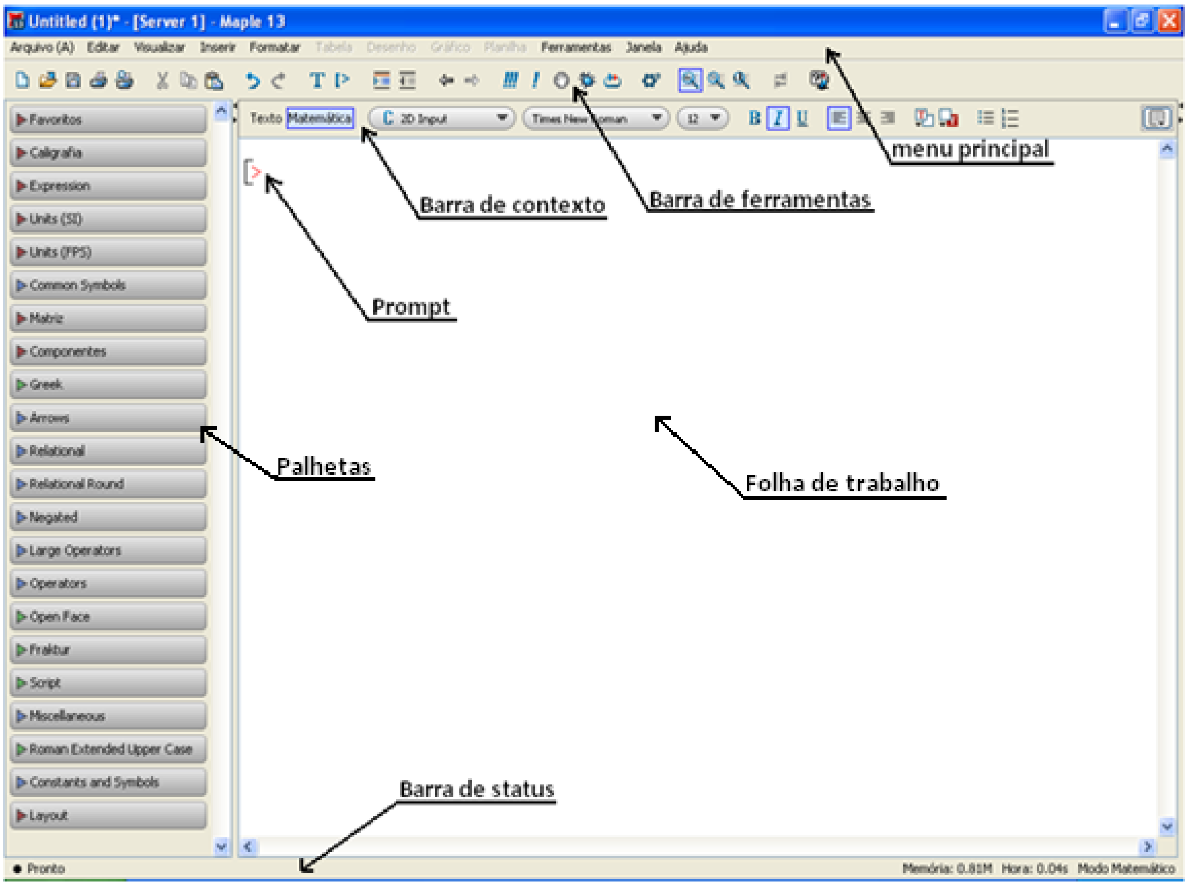
Este programa possui uma linguagem de programação simbólica. Os construtores deste sistema optaram em desenvolver um pequeno núcleo escrito na linguagem C gerenciando as operações que necessitam de maior velocidade de processamento, e a partir deste, desenvolveram uma nova linguagem. O próprio **Maple** foi escrito na mesma. Mais do que 95% dos algoritmos estão escritos nessa linguagem, estando acessíveis ao usuário.

Nesta apostila faremos uma introdução a alguns destes aspectos e apresentaremos os comandos do **Maple**. Contamos com sua colaboração para corrigir erros, acrescentar mais tópicos, exercícios, etc.

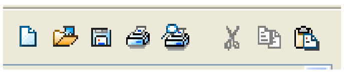
Apresentação

Ao abrir o **Maple**, visualizamos uma tela inicial que contém uma folha de trabalho em branco (*worksheet*), um menu principal e três barras: de ferramentas, de contexto e de status. Nesta folha pode mos adicionar funções do aplicativo, produzir textos, obter gráficos ou incluir hiperlinks. Ao salvá–la se cria um arquivo do tipo *nome*.**mw** .

Tela inicial do maple



No menu principal estão agrupados diversos comandos divididos entre submenus, sendo que alguns deles são similares ao que encontramos em editores de textos, como: *Word*, *Brofice*, dentre outros. Na barra de ferramenta encontram-se atalhos para acesso rápido a alguns comandos do menu principal. Abaixo segue um sucinto comentário sobre os principais ícones da barra de ferramentas.



← Esses ícones são análogos ao do *Word*, cujas funções são, da esquerda para a direita: abrir um documento novo, abrir um documento salvo, salvar, imprimir, visualizar impressão, recortar, copiar e colar.

← Este comando alterna para o modo matemático. Neste modo é inserido um aviso (*prompt*), donde se digita um comando para ser executado.

← Desfazer a última operação feita e refazer a última operação desfeita, respectivamente.

← Este comando interrompe uma ação que estiver sendo executada.

A barra de contexto contém 5 submenus, que são: texto, matemática, desenho, gráfico e animação. Os submenus mudam de acordo com a região da folha de trabalho que o cursor do mouse selecionar. Se um gráfico for gerado e clicarmos sobre ele, a barra de contexto automaticamente mudará para o submenu gráfico, se clicarmos sobre uma entrada do tipo texto, a barra de contexto mudará automaticamente para o submenu texto e assim segue.

A barra de status demonstra quando o **Maple** inicia ou termina de executar uma ação, se está no modo texto ou matemático, dente outros.

A interface gráfica do **Maple** não oferece dificuldade para os usuarios, o "*help*" (ajuda) contém muitos exemplos práticos de aplicação dos comandos. Quando soubermos o nome do comando, mas não soubermos como adicionar os parâmetros restantes ou soubermos apenas as iniciais do comando, podemos deixar o cursor do mouse sobre o nome ou as iniciais do comando e apertar a tecla *crtl* e *space* simultaneamente, que o **Maple** oferecerá opções de como completar o comando ou uma lista de possíveis comandos com aquelas iniciais. “Também podemos obter informações integrais sobre um comando, digitando o nome deste precedido por “?”, e em seguida apertando *Enter*, como, por exemplo, [> *?plot;*.

Inserindo comandos

Todo comando dado ao **Maple** deve ser escrito à frente do *prompt* (aviso), cujo símbolo é [> , e terminar com um”;” (ponto e vírgula) ou com “:” (dois pontos). Em seguida apertamos *Enter* para executá-lo. Se o comando terminar com ponto e vírgula, o resultado da sua execução será mostrado em azul logo em seguida. Se terminar com dois pontos, o resultado não será mostrado, podendo ficar guardado para uso posterior.

Se alternarmos para o modo texto, clicando no  ou apertando a tecla *F5*, o símbolo do *prompt* desaparecerá e o que for digitado neste modo não será interpretado pelo **Maple** como comando.

Exemplo

> $2+\frac{5\cdot 1.}{2};$

$$4.500000000 \quad (1)$$

> $2+\cos(\mathrm{Pi}):$ #*Veja que não foi mostrado o resultado desta operação*

> $5+2; 6\cdot\ln(3.);$

$$7$$

$$6.591673734 \quad (2)$$

<u>Observações:</u>

- Na linha de comando do **Maple**, tudo o que for digitado a direita do símbolo "#" será considerado um comentário. Os comentários são ignorados na execução do programa, servindo só para orientação do usuário.
- Observe que podemos escrever mais de um comando numa mesma linha, bastando apenas finalizar cada comando com " **:** " ou "**;**". O primeiro resultado, de cima para baixo, corresponde ao primeiro comando, da esquerda para a direita, mantendo essa ordem até terminar todos os comandos, exceto se houver algum comando terminando em "**:**" , o qual deve ser desconsiderado deste procedimento de verificação.

Maple como calculadora

Antes de começarmos a falar sobre como efetuar operações aritméticas utilizando o **Maple**, convém observar alguns detalhes.

No **Maple**, assim como numa calculadora, usamos o ponto final (.) para inserir um número decimal, e não a virgula como é de costume. Assim para inserirmos 2,25 digitamos: 2.25. Se digitarmos 2,25 o programa interpretará esta expressão como dois números distintos, a saber: 2 e 25.

O resultado das operações aritméticas é fornecido com dez casas decimais por padrão. Podemos alterar isto com o comando "***Digits:***=*n*", onde *n* é o número de casas decimais desejado (Veja mais detalhes sobre este comando na seção Aritmética de ponto flutuante).

1) Soma, multiplicação, subtração e divisão

As operações aritméticas básicas são feitas utilizando as teclas **+** (*somar*), **-** (*subtrair*), **/** (*dividir*) e * (*multiplicar*).

Exemplo

```
> 2 + 3; 2·3;
                                        5
                                        6
> 5 − 6; 6/3;
                                        −1
                                        2
>
```

2) Potenciação, radiciação e fatorial

Utilizamos o símbolo " **^** " ou " ****** " para efetuar a potenciação.

Para calcular a raiz *n*-ésima de um número utilizamos o comando "***surd****(radicando,n)*". Também podemos calcular a raiz quadrada de um número utilizando o comando "***sqrt*** *(radicando)*".

Para calcular o fatorial de um número utilizamos o símbolo " **!** "

Exemplo

```
> 5^2;# utilizando o símbolo " ^ "
                                        25
> 5· ·2;#utilizando o símbolo " ** "
                                        25
> sqrt(64); surd(64, 3);
                                        8
                                        4
> 7!;
                                        5040
```

3) Prioridade das operações

As prioridades com relação às operações são as mesmas que aprendemos no estudo da matemática, primeiro efetua-se a potenciação e o fatorial, por segundo efetua-se a multiplicação e a divisão e por último a soma e subtração. Podemos usar os parênteses para alterar as prioridades das operações, porém colchetes e chaves não devem ser utilizados com esta finalidade.

Exemplo

```
> 5 + 3·6^2;
                                        113
> (5 + 3)·6^2;
                                        288
> 6/3·7 − 2!;
                                        12
> 6/3·(7 − 2)!;
                                        240
```

4) Logaritmo, logaritmo neperiano e potência de base *e*

Se quisermos calcular $\log_a b$ escrevemos "***log***[*a*](*b*)". Para o *logaritmo neperiano* basta fazer $a = e$ ou escrever "***ln***(*b*)", ou ainda "***log***(*b*)". Já para calcularmos e^x digitamos "***exp***(*x*)".

Exemplo

```
> log[8](12!); log[8.](12!);
```

$$\frac{1}{3}\,\frac{\ln(479001600)}{\ln(2)}$$

$$9.611818411 \qquad \textbf{(1)}$$

```
> log(exp(1)); ln(sqrt(23)); ln(sqrt(23.));
```

$$1$$

$$\frac{1}{2}\ln(23)$$

$$1.567747108 \qquad \textbf{(2)}$$

```
> exp(1); exp(1.); evalf(exp(1));
```

$$e$$

$$2.718281828$$

$$2.718281828 \qquad \textbf{(3)}$$

Observação:

- Observe na linha (3) que quando fizemos "***exp***(1)" obtivemos como resposta a expressão simbólica e, que é a base dos logaritmos naturais ou neperianos. Para que fosse obtido o valor decimal aproximado, inserimos um ponto final após o 1. Com o mesmo intuito, usamos o comando "***evalf***(*x,n*)", que serve para avaliar em ponto flutuante (veja seção aritmética de ponto flutuante para mais detalhes), onde *x* é uma expressão numérica ou uma expressão simbólica que representa um real conhecido e *n* é a quantidade de algarismos significativos desejado. E isso ocorreu também na linha **(2)** e **(3)**.

5) Uso dos Operadores Idem

O símbolo "*%*" representa o operador idem, que serve para referir-se a um valor previamente computado. Usamos:

% : refere-se ao último valor computado;
%% : refere-se ao penúltimo valor computado;
%%% : retorna o antepenúltimo valor calculado.

Atente para o fato de que este operador não retorna a expressão mais próxima, nem a segunda mais próxima, mas sim a última, a penúltima e a antepenúltima calculada, independente da disposição de tais expressões na folha de trabalho em relação ao lugar que você usa o operador.

Exemplo

```
> restart :
> sqrt(5 + ln(23.));#Primeiro calculamos este.
                                        2.852278776        (1)
> evalf(% + surd(98, 3));#Logo em seguida este.
                                        7.462715068        (2)
> % + %%;
                                        10.31499384        (3)
```

6) Razões trigonométricas

Para calcular o valor do *seno*, *cosseno* e *tangente* utilizamos os comandos "***sin****(x)*", "***cos****(x)*" e "***tan****(x)*", respectivamente, onde a expressão *x* deve estar em radianos. Olhe a tabela em anexo para obter os comandos para as outras razões trigonométricas e também comandos para as funções hiperbólicas. O número π é inserido digitando-se "***Pi***". Se digitarmos "***pi***", então apenas estaremos representando a letra grega π no maple, livre de qualquer valor numérico.

Exemplo

> $\sin(3 \cdot \mathrm{Pi});$

$$0 \qquad (1)$$

> $\mathrm{surd}\left(\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{8.}\right) - \cos(\tan(3.)), 3\right); \mathit{evalf}(\%);$

$$-\left(-\sin(0.1250000000\,\pi) + 0.9898574333\right)^{1/3}$$

$$-0.8467809041 \qquad (2)$$

> $\left(\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)\right)^2;$

$$1 \qquad (3)$$

Observação:

- Para convertemos um valor x em graus para radianos, podemos abrir mão do comando "***convert****(x*degrees,radians)*"

7) Denominando objetos do Maple

A estrutura "*nome*:= *expressão*" nos permite "apelidar" uma expressão escrita no **Maple** de um nome. Por exemplo, se digitarmos "*x* := 2" ele passa a considerar o valor da variável "*x*" como sendo "2", assim todas as vezes que digitarmos "*x;*" ele mostrara em azul o número 2. Isto é muito útil quando estamos trabalhando com expressões "grandes".

Exemplo

> $a := 2;$

$$a := 2 \quad (1)$$

> $b := 5;$

$$b := 5 \quad (2)$$

> $a + b;$

$$7 \quad (3)$$

Exercícios

1) Calcule:

a) $\sqrt{36} + \sqrt{625}$
b) $\sqrt{16} - (\sqrt{4} + \sqrt{20 \times 5})$
c) $\sqrt{2435} \times \sqrt{54636}$
d) $\sqrt{2453} \div \sqrt{35463}$

2) Sendo x=3, y=9, w=1/3, z= -2 e t= -1/2, calcule:

a) x^t
b) y^w
c) t^z
d) $t^y - z^x$
e) $w^z : y^t$

3) Verifique que $\frac{355}{113}$, $\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$, $\sqrt[5]{\frac{77729}{254}}$ e $\boldsymbol{ln}\left(\frac{10691}{462}\right)$ são aproximações do número $\boldsymbol{\pi}$ com pelo menos 6 casas decimais.

4) Calcule:

a) e^e
b) $e^3 + 2^e$

Breve História dos Números

O conhecimento dos números foi fundamental na evolução da História do Homem, e desde as épocas mais remotas encontramos várias provas de seu conhecimento. O ser humano desenvolveu gradativamente a capacidade de identificar quantidades e de registrá-las. Acredita-se que os primeiros sinais foram símbolos para designar quantidades, isto há mais de 50 mil anos.

Com o aperfeiçoamento da escrita, os povos foram criando, cada qual a sua forma de representação numérica, os seus algarismos. Em diversos povos podemos perceber o desenvolvimento dos seus sistemas de numeração e de suas utilizações no processo de contagem.

Com o nascimento das primeiras cidades sumérias e egípcias (4000 a.C.), desenvolveram-se atividades que, como o comércio e a agricultura, precisavam ser simbolizadas. Era preciso um sistema de comunicação conhecido de forma ampla, que possibilitasse uma melhor interação entre as pessoas. Era necessário saber contar os produtos comprados, vendidos ou armazenados. As colheitas precisavam também ser contabilizadas. Essa é a origem longínqua dos números que utilizamos até hoje.

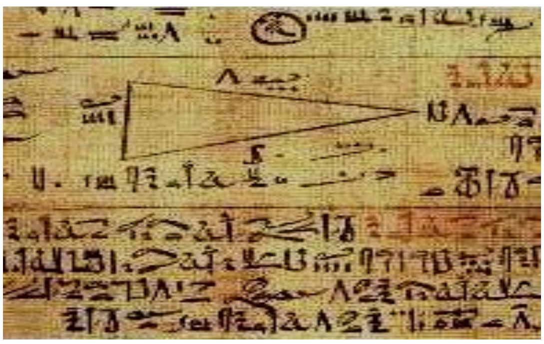
O egípcio Aahmesu (1650 a.C.) escreveu um papiro contendo problemas resolvidos do cotidiano. Este papiro ajudou aos cientistas compreenderem o sistema de numeração egípcio, que se baseava em 7 símbolos representando 7 números chave.

Somente no século III a.C. começou a formar-se um sistema de numeração romano, utilizando as próprias letras do alfabeto: I, V, X, L, C, D e M. Já as primeiras representações do zero foram realizadas pelos babilônicos e hindus, e sua representação gráfica foi incorporada ao nosso sistema aproximadamente em 1600.

Egípcios

Os egípcios criaram um elaborado sistema de escrita, que incluía também uma forma de registro numérico. Isso ocorreu por volta de 3000 a.C., ou seja, mais ou menos ao mesmo tempo em que na Mesopotâmia.

Há mais ou menos 3.600 anos, o faraó do Egito tinha um súdito chamado Aahmesu, cujo nome significa "Filho da Lua". Aahmesu ocupava na sociedade egípcia uma posição muito mais humilde que a do faraó: provavelmente era um escriba. Hoje Aahmesu é mais conhecido do que muitos faraós e reis do Antigo Egito. Entre os cientistas ele é chamado de Ahmes. Foi ele quem escreveu o Papiro Ahmes ou Rhind.



Papiro Ahmes (extraído de *pt.wikipedia.org/wiki/**Papiro**_de_Rhind)*

O sistema de numeração egípcio baseava-se em sete números-chave e usavam símbolos para representar esses números. Eles não se preocupavam com a ordem dos símbolos e se eram dispostos verticalmente ou horizontalmente.

Número	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
Simbologia							
Significado	bastão vertical	ferradura	Rolo de pergaminho	Flor de lótus	dedo curvado	sapo ou girino	homem ajoelhado

Extraído do livro: Um enfoque pedagógico da matemática para o ensino fundamental.

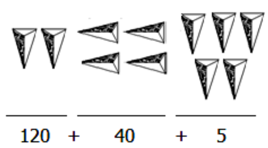
Exemplo

Mesopotâmicos

Os sumérios, babilônios e assírios habitavam a região que fica entre os rios Tigre e Eufrates, onde hoje é parte do Iraque. O nome Mesopotâmia significa entre os rios, e nesta região foram encontrados milhares de placas de barro contendo registros numéricos, onde os escribas, com ajuda de um bastonete, escreviam sobre placas com o barro ainda mole, cozidas depois no fogo ou apenas secadas ao sol. Sua numeração foi na base 60 e eles utilizavam somente de três símbolos:

Números	0	1	10
Simbologia			

Exemplo: O número 145 pode ser decomposto como 145= 2(60) + 20+ 5, por isso era representado como:



Hoje em dia ainda prevalecem alguns elementos culturais deste povo, como: os doze meses do ano, a semana de sete dias, os 12 mostradores do relógio, 1 horas de 60 minutos, 1 minuto de 60 segundos, o círculo de 360 graus, a crença nos horóscopos, entre outros.

Gregos

Os Gregos viam a Matemática como uma forma de compreender o lugar do homem no universo de acordo com um esquema racional.

Nos tempos de Alexandria, ou talvez antes, apareceu um método de escrita de números que foi utilizado durante quinze séculos, não só por cientistas, mas também por mercadores e administradores. Usavam os sucessivos símbolos do alfabeto grego para exprimir, primeiro, os nossos símbolos 1, 2, ..., 9, depois, as dezenas de 10 a 90 e, finalmente, as centenas de 100 a 900.

Existiram três formas de numeração na Grécia, todos na base decimal: o mais antigo era baseado em cinco símbolos e os outros dois nas letras gregas maiúsculas e minúsculas, respectivamente. Na tabela a seguir apresentamos a mais conhecida e a forma de escrevê-las no Maple:

Número	Símbolo	Letra Grega	No maple se escreve:
1	α	alfa	alpha
2	β	beta	beta
3	γ	gama	gamma
4	δ	delta	delta
5	ε	epsílon	epsilon
6	ς	digama	
7	ζ	zeta	zeta
8	η	eta	eta
9	θ	teta	theta
10	ι	iota	iota
20	κ	capa	kappa
30	λ	lambda	lambda
40	μ	mi	mu
50	ν	ni	nu
60	ξ	csi	xi
70	ο	ômicron	omicron
80	π	pi	pi
90	ϙ	qoppa	
100	ρ	rô	rho
200	σ	sigma	sigma
300	τ	tau	tau
400	υ	ípsilon	upsilon
500	φ	fi	phi
600	χ	qui	chi
700	ψ	psi	psi
800	ω	ômega	omega
900	ϡ	Sã (sampi)	

Extraído do livro: Um enfoque pedagógico da matemática para o ensino fundamental.

Para os primeiros nove múltiplos de mil, o sistema adotou as primeiras nove letras do alfabeto grego (um uso parcial do princípio posicional); que, para maior clareza, eram precedidas por uma vírgula antes do símbolo.

,α	,β	,γ	, δ	,ε	,ς	,ζ	,η	,ϑ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Primeiros nove múltiplos de mil no sistema numérico grego

Exemplo

1315 → $,\alpha\ \tau\ \iota\ \varepsilon$

Maias

Os maias habitavam a região onde hoje se localiza o sul do México e a América Central. Seu sistema de numeração era de base visegimal (vinte). A razão para isso, como se sabe, foi possivelmente pelo fato de que seus ancestrais tinham de contar não apenas com os dez dedos das mãos, mas também com os dedos dos pés. Este sistema de numeração foi criado com o intuito de servir como um instrumento para medir o tempo e não para fazer cálculos matemáticos. Por isso, os números maias têm a ver com os dias, os meses e os anos, e com a maneira como organizavam o calendário. O calendário dos maias era composto por 18 meses de 20 dias cada um. Para ter um ano de 365 dias, acrescentavam 5 dias a mais. Estes dias não tinham nome e eram considerados desafortunados (wayeb). Utilizavam apenas três símbolos, assim como os mesopotâmios:

Número	Simbologia	Significado
0		olho ou concha de um caracol ou ovalo
1	•	ponta do dedo ou um ponto
5	▬	palma da mão ou cajado ou 5 pontos juntos

Chineses

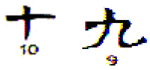
Entre os sistemas de numeração mais antigos encontra-se o utilizado pelos chineses e adotado mais tarde pelos japoneses. Os Chineses Primitivos usavam numerais que eram escritos em folhas com tinta preta. Pensa-se que a escolha dos símbolos usados na representação dos algarismos chineses, ficou a dever-se à semelhança fonética que existia entre o símbolo e a palavra oral correspondente aos algarismos. Este fato poderia explicar a escolha de um homem para representar o 1 000. Mas esta não é a única explicação, a escolha dos símbolos pode também ter sido de ordem religiosa.

Representação dos números no sistema chinês

Neste sistema, as dezenas, centenas e milhares são representados segundo o principio multiplicativo, ou seja, agrupando os sinais correspondentes aos números necessários para obter o produto pretendido. Todos os outros números podem ser obtidos através de uma composição dos princípios multiplicativo e aditivo, tal como ilustra a figura seguinte:

Exemplo

representa $10 + 8 = 18$



representa $9 \times 10 = 90$

Romanos

O sistema de numeração romano foi edificado como um sistema de agrupamento simples de base dez. Os símbolos gráficos a que este sistema recorre, tal como os conhecemos hoje, parecem ter sido extraídos de letras do alfabeto latino.

Número	1	5	10	50	100	500	1000
Simbologia	I	V	X	L	C	D	M

Exemplo

O número 15 é representado por 10 + 5, que se escreve XV. O 3 010 = 1 000 + 1 000 + 1 000 + 10 é representado por MMMX. O 2909 = 1000 + 1000 + 500+ 100 + 100 + 100 + 100 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 foi representado inicialmente por MDCCCCVIIII e muito mais tarde por MMCMIX.

Os romanos criaram uma regra para simplificar a escrita numérica: colocando-se algarismos à esquerda de algarismos maiores, subtraíam-se os valores. Esta regra somente era válida para os algarismos I, X, C e com as seguintes especificações:

- **i)** I só podia vir antes do V e do X;
- **ii)** X, antes do L e do C;
- **iii)** C, antes do D e do M;
- **iv)** Não repetir mais de três vezes o mesmo símbolo.

Quando se colocava um traço em cima do(s) algarismo(s), indicava-se que este(s) deveria(m) ser multiplicado(s) por 1 000.

Exemplos

50 × 1000 = 50 000, representado por: $\overline{L}$

V XC 90 × 1000 + 5 = 90 005, representado por $\overline{IX}\ V$

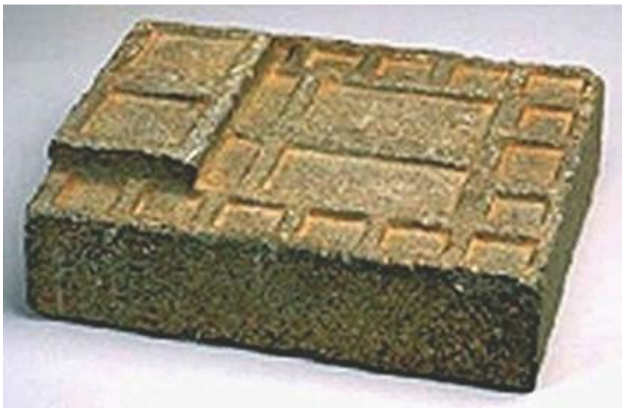
XII = 12 × 1000 = 12 000, representado por $\overline{XII}$

Observações:

- Ainda hoje, os algarismos romanos são usados na escrita dos séculos, na indicação de capítulos de livros, nos mostradores do relógio etc.
- Não há evidência histórica de que um múltiplo adicional de 1000 poderia ser indicada por uma segunda linha.
- Os valores 500 000 e 1 000 000 foram representados por Q (milia quingenta) e uma caixa em torno da letra X (para 10 mil), respectivamente. Não há evidência histórica de que um C rodeado por uma caixa destina-se a representar 10 000 000

Incas

O sistema de numeração utilizado no Tahuantinsuyo (Incas) era o decimal, o que facilitava o registro e as operações numéricas. Os registros de datas, contas, etc. eram realizados por meio de nós (laços) nos quipus (corda grossa, da qual estão suspensas outras cordas coloridas) e a representação de números se dava através de palavras e símbolos geométricos. Para efetuar as operações numéricas utilizavam o ábaco inca, chamado de Yupana, que tem a forma de paralelepípedo com diversas cavidades, onde colocavam grãos de milho. A distribuição do milho nas cavidades tem um valor baseado nos números de Fibonacci.

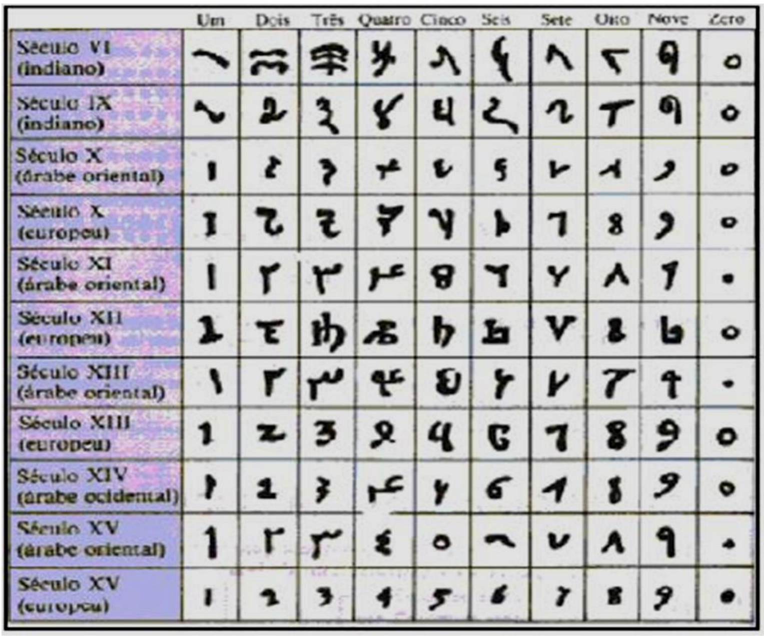


Fotografia de uma Yupana (ábaco inca)

Sistema Numérico Indo-Arábico

Os algarismos indo-arábicos ou simplesmente arábicos, que conformam nosso sistema numérico, foram criados e desenvolvidos pela civilização hindu que vivia no vale do Rio Indo (hoje, Paquistão) e trazidos para o ocidente pelos árabes. Estes algarismos reúnem as diferentes características dos antigos sistemas e é um sistema posicional decimal (base 10). Posicional, pois um mesmo símbolo, dependendo da posição ocupada, representa valores diferentes.

Inicialmente (IV d.C) utilizavam somente os algarismos de 1 à 9 e o zero era representado por um ponto negrito. Em 825 d.C., o matemático persa Al-Khowârizmî, publicou o sistema de numeração decimal que usamos hoje em dia. Por causa dele os símbolos utilizados são chamados de algarismos. Estes símbolos sofreram muitas modificações em sua grafia pelos hindus, árabes e europeus, até que se estabilizassem. Veja algumas das modificações da escrita dos números na figura abaixo: (Extraído de [3])



Evolução da escrita dos números

Números em diferentes bases

Como vimos, nem todas as civilizações usaram a base dez. Na língua francesa atual, por exemplo, detecta-se vestígios de uma base vinte na denominação de alguns números, cuja base foi utilizada pelos celtas, povo que viveu na Europa no início da era cristã. Assim, para se referir ao oitenta (80), os franceses dizem quatre-vingt, que significa quatro vezes vinte (4×20). Esta base também foi adotada por outros povos, como nas civilizações maia e asteca.

Há quatro mil anos, os mesopotâmicos usaram a base sessenta. Muitos mercadores utilizavam a base 12, por ter mais divisores que o número 10.

Atualmente, é usado em larga escala o sistema de numeração de base 2, o sistema binário. Esse sistema já era usado pelos chineses há 3000 anos a.C. Quarenta e seis séculos depois, Leibniz redescobre o sistema binário. Este sistema de numeração binário é muito importante, na medida em que, modernamente, é de largo alcance por ser utilizado nas calculadoras, computadores e nas estruturas que envolvem relações binárias. Este sistema utiliza apenas dois algarismos, o 0 e o 1, os quais nas estruturas dessas máquinas se fazem corresponder às situações de sim-não, aberto-fechado, contato-interrupção, passagem-vedação, etc., uma vez que os circuitos digitais são constituídos por elementos dotados de dois estados distintos. Cada um dos símbolos do sistema binário chama-se um “bit”.

Representar um número em diferentes bases

Antes de tudo, devemos estar cientes de que qualquer inteiro positivo n admite uma única representação da forma:

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + a_{m-2} b^{m-2} + \ldots + a_1 b + a_0 \qquad (1)$$

O inteiro b $(2 \leq b \leq 10)$ é chamado de base e os algarismos a_i $(i = 0 \ldots m)$ são os restos das divisões sucessivas, portanto $0 \leq a_i < b$, para $i = 0 \ldots m$. Para bases maiores que 11 são empregadas letras para representar restos acima de 9.

A forma (1) de representação de um inteiro positivo n é escrita de maneira abreviada como

$$(a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots\ a_1 a_0)_b\ ; \quad 0 \leq a_i < b \text{ e } 2 \leq b \leq 10.$$

Como exemplo, o número 54 pode ser decomposto da forma:

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2 + 0,$$

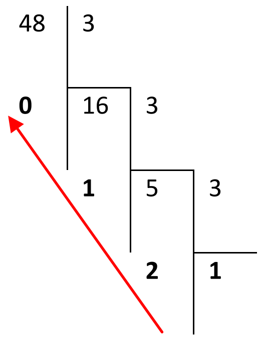
onde fizemos $b = 2$. Observe que os a_i ’s são sempre menores que 2 e que só existe esta forma de escrever o 54 com $b = 2$. Dizemos que o 54 está representado na base 2, pois $b = 2$, e escrevemos $54 = (110110)_2$. Veja que esta sequência de 1 e 0 nos é familiar, ela é chamada também de sistema binário e é largamente utilizado na computação. Outra observação importante é que o 54 está inicialmente representado na base decimal ($b = 10$), que é a base que utilizamos. Então poderíamos escrever $5.10 + 4$ ou $(54)_{10}$, mas simplesmente escrevemos 54.

Para representar um número numa base qualquer, temos que seguir um procedimento simples, representado nos exemplos a seguir.

Exemplo

Vamos representar o 48 na base 3.

Para isto, começamos dividindo o 48 por 3 e o resto desta divisão será o nosso a0 da igualdade (1). Dividimos então o quociente da divisão anterior por 3 e o resto será o nosso a1 da igualdade (1). Continuamos este procedimento até que o resto seja menor que o dividendo.



Portanto o número 48 na base 3 é representado por: $48 = (1210)_3$

Exemplo

Dado o número $(1011)_2$, descubra qual número ele representa na base 10.

Os 1 e 0 são os ai da expressão (1), onde $b = 2$. Sendo assim basta fazer 1.23+0.22+1.2+1=11. Portanto (1011)2 =11 na base 10.

Os exemplos anteriores são aplicados a qualquer valor da base e se quisermos converter um número que não esteja na base 10 para uma base não decimal, devemos converter primeiramente para a base 10 e da base 10 para a base desejada.

Mudando de base no Maple

Mudar de base é um processo mecânico, uma tarefa típica para uma máquina como o computador. Veremos nesta secção como utilizar o **Maple** para fazer mudanças de base.

Usamos no **Maple** o comando “***convert***$([a_0, a_1, ..., a_{m-2}, a_{m-1}, a_m]$,***base***, *base atual, base para a qual deseja converter)*” para fazer as mudanças de base, sendo os ai os algarismos da igualdade (1). Como resultado obtemos uma lista $[a'_0, a'_1,...,a'_m]$, que são os algarismos do número na base nova, só que escritos na ordem inversa, pois como vimos o a'_0 é o primeiro algarismo da direita.

Quando estamos com um número inicialmente na base decimal, podemos usar uma forma mais simples do comando ***convert*** , que é “***convert***(*número na base decimal*, ***base***, *base* *para a qual deseja converter*)", obtendo uma lista de algarismo de modo igual a forma anterior.

Exemplos

*a)*Escrever o número 8253, utilizando os números romanos;

```
> restart:
> convert(8253, roman);
                              "MMMMMMMMCCLIII"
```

b) Converter o número romano XCI para número indo-arábicos;

```
> convert(XCI, arabic);
                              91
```

c) Escrever o número 8253 nas bases: binária, vigesimal e decimal;

```
> convert(8253, binary);
                              10000000111101
> convert(8253, base, 20);
                              [13, 12, 0, 1]
> convert(8253, base, 10);
                              [3, 5, 2, 8]
```

d) Converter o número $(110)_2$ para a base decimal;

```
> convert(110, decimal, binary);
                              6
```

e) Converter o número $(2253)_8$ da base octal, para a base decimal e este número passar para a base binária;

```
> convert(2253, decimal, octal);
                              1195
> convert(%, binary);
                              10010101011
```

f) Converter o número $(2253)_8$ para a base binária.

```
> convert([2, 2, 5, 3], base, 8, 2);
                              [0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1]
```

Exercícios

1) Escreva o número 389 com a simbologia utilizada pelos:

a) Romanos *b*) mesopotâmicos *c*) maias

d) gregos *e*) chineses

2) Escreva o número 389 nas bases

a)binária *b*) octal *c*) vigesimal *d*) cinco

Aritmética de ponto flutuante

Nesta seção falaremos brevemente sobre o modo no qual os números são representados em um computador ou em uma calculadora, para que se possa ter melhor entendimento sobre as discrepâncias de resultados fornecidos por operações numéricas efetuadas em máquinas distintas (calculadoras, computadores etc.).

A aritmética de ponto flutuante é um sistema no qual computadores e calculadoras representam um número real. Neste sistema os números são representados da forma:

$$\pm(.\,d_1 d_2 \ldots d_n) \times \beta^e,$$

em que $d_1, d_2 \ldots d_n$ são os algarismos significativos do número em questão (como 1,2 e 3 são os algarismos significativos de 0,123) e:

i) β é a base em que a máquina opera

ii) $d_i \in \{1,2,3,\ldots,(\beta-1)\}$, com $d_1 \neq 0$;

iii) e é o expoente pertencente ao intervalo $[m, M]$;

iv) n é o número máximo de dígitos da mantissa (o número 0,123 tem três dígitos na mantissa).

Vamos tomar como exemplo um sistema onde $\beta = 10$, $e \in [-5,5]$ e $n = 3$, que representamos por $F(10,3,-5,5)$ (1). O número 2,54 é representado neste sistema como $0{,}254 \times 10$. O 0,025 é representado como $0{,}25 \times 10^{-1}$. Note que o maior número representado por (1) é $0{,}999 \times 10^5$ e que o menor número representado por ele é $0{,}100 \times 10^{-5}$, visto que $d_1 \neq 0$. Daí $0{,}235 \times 10^6$ não pode ser representado em (1), pois o expoente está além do limite superior pré-fixado na definição do sistema, o que chamamos de *overflow*, assim como $0{,}102 \times 10^{-8}$ também não, pois o expoente está aquém do limite inferior definido antecipadamente, e isto é denominado *underflow*.

Bem, e se tivermos 12,2654, como ficaria a sua representação? Observe que seguindo a mesma linha de raciocínio seria $0{,}122654 \times 10^2$, mas isto não é possível pois o número máximo de dígitos na mantissa é três. Aqui é que entra o propulsor das diferenças de resultados entre máquinas distintas: a aproximação. Para resolver este problema, adota-se dois critérios: o arredondamento ou o truncamento (cancelamento).

a) ***Arredondamento***: Para arredondarmos um número x na k-ésima casa decimal adotamos a seguinte regra:

i) se o $(k + 1)$-ésimo algarismo for 0,1,2,3,4, mantemos o k-ésimo algarismo;

ii) e se ele for 5,6,7,8,9, adicionamos uma unidade ao k-ésimo algarismo.

Adotando este procedimento, o número 12,2654 fica $0{,}123 \times 10^2$ no sistema (1), porque o dígito da quarta casa decimal é o 6.

b) ***Truncamento***: Para truncar um número na k-ésima casa decimal basta desconsiderar os números a partir da $(k + 1)$ −ésima casa decimal.

Se fosse adotado este método, o número 12,2654 ficaria $0{,}122 \times 10^2$ em (1).

O que acabamos de ver é o que acontece nos computadores e calculadoras, eles sempre trabalham com uma quantidade fixa de dígitos na mantissa e os números que ultrapassam esta quantidade são truncados ou arredondados, gerando erros nos cálculos. Para clarear esta assertiva vamos supor que queiramos somar 2,354 e 34,564 utilizando uma máquina munida do sistema (1) e que as aproximações são feitas por arredondamento. Primeiramente vamos representar esses dois números no sistema, ficando $0{,}235 \times 10 = 2{,}35$ e $0{,}346 \times 10^2 = 34{,}6$, respectivamente.

Assim, $2{,}35 + 34{,}6 = 36{,}95$. Note que a soma tem quatro algarismos, sendo assim precisamos arredondar novamente, obtendo 37,0. Mas se fizermos $2{,}354 + 34{,}564 = 36{,}918$ e arredondarmos temos 36,9, resultado ligeiramente diferente. Agora imagine se houvessem diversas parcelas, percebe-se claramente o acúmulo do erro, e isto é o que gera algumas diferenças quando realizamos cálculos em máquinas que possuem sistemas distintos, como, por exemplo, se realizarmos esta mesma operação só que supondo o sistema $F(10,5,-5,5)$.

Podemos saber o intervalo de definição do expoente e e o número de dígitos máximo da mantissa para o computador em que o **Maple** esta instalado através do comando "***Maple_floats****(expresão)*", onde expressão pode ser:

- MAX_EXP, para saber o expoente máximo;
- MIN_EXP, para saber o expoente mínimo;
- MAX_DIGITS, para saber a quantidade máxima de dígitos da mantissa.

Com o comando "***Digits****:=n*" podemos alterar a quantidade de dígitos da mantissa, que por padrão é 10, onde n é a quantidade desejada. Digite "***Digits****:=3:*" e faça $2{,}354 + 34{,}564$ para ver o resultado. Depois digite "***Digits****:=5:*" e faça novamente $2{,}354 + 34{,}564$.

Conjuntos

O escrito mais antigo que se tem conhecimento envolvendo a idéia informal de conjunto data de 3000 a.C.. Este escrito se encontra na cabeça do cetro do rei Menés, fundador da primeira dinastia egípcia, e registra o produto de uma de suas vitórias militares: 400.000 bovinos, 1.422.000 caprinos e 120.000 prisioneiros. Os números no escrito passam a idéia de cardinalidade e portanto envolvem, ainda que informalmente, a idéia de conjunto.

Os gregos alcançaram um nível maior no desenvolvimento da idéia de conjunto. Exemplo disto foi Arquimedes (287-212 a.C.), que calculou o número de grãos de areia necessário para preencher o universo, usando dimensões estimadas pelo astrônomo Aristarco de Samos (310-230 a.C.), donde concluiu que este número não ultrapassa 10^{63}. E foram ainda mais além, abordando até conjuntos infinitos. Aristóteles (348-322 a.C.) escreveu sobre o assunto.

A teoria dos conjuntos foi formulada no século XIX, por volta de 1872, pelo matemático russo Geord Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845-1918), motivado pela tentativa de solucionar um problema técnico de matemática na teoria das séries trigonométricas. Cantor mostrou, entre outras coisas, que IN, Z e Q têm a mesma cardinalidade e que IR tem cardinalidade "maior" que a de IN. Dito de outra maneira, significa que IN, Z e Q têm a "mesma quantidade" de elementos, mas que IR tem "mais" elementos do que esses conjuntos. Mas a teoria dos conjuntos de cantor apresentava paradoxos e no século XX começou a ser aperfeiçoada, devendo-se a Bertrand Russell e Ernst Zermelo as primeiras tentativas de axiomatização da teoria dos conjuntos.

Conceitos iniciais

Um conjunto é um agrupamento, reunião ou coleção de coisas. Podemos representar os conjuntos com suas propriedades e operações no **Maple** de maneira similar a que aprendemos na teoria dos conjuntos.

Seja A $= \{x \mid x$ é uma vogal $\}$, assim:

a) Podemos representar os elementos do conjunto A da mesma forma que estamos acostumados a fazer. Única exceção feita é na utilização do símbolo "**:=**" ao invés do sinal de igual somente, pois este é utilizado no **Maple** objetivando construir equações, enquanto aquele é utilizado para atribuir valor a um símbolo qualquer. Como neste caso estamos querendo dizer ao **Maple** que a letra A é na verdade um conjunto, utilizamos "**:=**".

Exemplo

```
> A := {a, e, i, o, u};
                              A := {a, e, i, o, u}
```

b) No **Maple**, da mesma forma na qual aprendemos, a ordem em que os elementos de um conjunto estão dispostos não importa, se dois conjuntos tiverem os mesmos elementos eles serão iguais.

Exemplo

> $B := \{a, i, e, u, o\};$

$$B := \{a, e, i, o, u\}$$

c) O conceito primitivo de pertinência, que é representada pelo ∈, também pode ser representado no **Maple** através do comando ***"in"***

Exemplo

> A **in** $a;$

$$\{a, e, i, o, u\} \in a$$

Observação:

Observe que o comando ***in*** só é usado para inserir o símbolo de pertinência, pois se quisermos verificar se um elemento realmente pertence a um conjunto usamos o comando "***member***(*elemento,conjunto)*" ou "***evalb****(elemento* **in** *conjunto)*"

Exemplo

> f **in** $A;$

$$f \in \{a, e, i, o, u\}$$

> $member(f, A);$

$$false$$

> $evalb(f$ **in** $A);$

$$false$$

Subconjuntos

Se todos os elementos de um conjunto A forem também elementos de um conjunto B, dizemos que A é um subconjunto de B. Representamos este acontecimento pelo símbolo ⊂. Daí $A \subset B$.

Para verificar, no **Maple**, se um conjunto $A \subset B$, usamos o comando ***"subset"***.

Exemplo

```
> B := {3, 4, 6, 7};
                                B := {3, 4, 6, 7}
> A := {4, 6};
                                A := {4, 6}
> A subset B;
                                true
> C := {3, 4, 8};
                                C := {3, 4, 8}
> C subset B;
                                false
```

Operações com Conjuntos

União

O conjunto $A \cup B = \{x|x \in A \text{ ou } x \in B\}$ é o conjunto da união do conjunto A com o conjunto B.

No **Maple** utilizamos o comando ***"union"*** para fazer a união entre dois conjuntos.

Exemplo

```
> A := {bola, 2, 3};
                                A := {2, 3, bola}
> B := {mesa, 7};
                                B := {7, mesa}
> AUB := A union B;
                                AUB := {2, 3, 7, bola, mesa}
```

Intersecção

O conjunto $A \cap B = \{x|x \in A \; e \; x \in B\}$ *é* o conjunto formado pela intersecção de A e B.

Para definir a intersecção de dois conjuntos no **Maple** utilizamos o comando "***intersect"***.

Exemplo

```
> A := {1, 2, b};
                                A := {1, 2, b}
> B := {2, b, m, n};
                                B := {2, b, m, n}
> AnB := A intersect B;
                                AnB := {2, b}
```

Diferença

O conjunto $A - B = \{x|x \in A \text{ e } x \notin B\}$ é o conjunto da diferença entre A e B.

No **Maple** a diferença entre dois conjuntos é definida pelo comando ***minus***.

Exemplo

> $A := \{1, 2, b\};$

$$A := \{1, 2, b\}$$

> $B := \{2, b, m, n\};$

$$B := \{2, b, m, n\}$$

> $AmenosB := A \textbf{ minus } B;$

$$AmenosB := \{1\}$$

Observação:

Para descobrir a cardinalidade de um conjunto, utilizamos o comando ***nops***.

> $C := \{1, 2, 3, b, n, j, 4\};$

$$C := \{1, 2, 3, 4, b, j, n\}$$

> $nC := nops(C);$

$$nC := 7$$

Conjuntos Especiais

Nesta seção apresentaremos a escrita de alguns conjuntos especiais.

Conjunto vazio

Na teoria dos conjuntos, o conjunto vazio é representado pelo símbolo "{}". No **Maple** definimos o conjunto vazio da mesma maneira.

Exemplo:

> $Vazio := \{\ \};$

$$Vazio := \{\ \}$$

Números Naturais

Os números naturais estão intimamente ligados com a necessidade de contar e, profundamente falando, podemos dizer que o número natural é uma propriedade comum a dois ou mais conjuntos que estejam em relação biunívoca, isto é, uma propriedade comum a dois ou mais conjuntos em que cada elemento de um está associado a um único elemento do outro e vice-versa. Esta propriedade comum é a quantidade de elementos. Por exemplo, antigamente os pastores utilizavam pedras para saber a quantidade de ovelhas no rebanho que deixavam o cercado para ir pastar, fazendo com que cada pedra representasse uma única ovelha e que cada ovelha fosse representada por uma única pedra, e deste modo descobriam se todas as ovelhas tinham voltado ao cercado no final do dia. Na verdade eles estavam estabelecendo uma relação biunívoca entre o conjunto de pedras e de ovelhas, e utilizando a propriedade comum aos dois conjuntos, que é a quantidade de elementos, verificavam o número de ovelhas através do número de pedras.

No século VII surgiram as primeiras formas dos numerais (0, 1, 2,..) que costumamos utilizar para representar os números, deixando de lado as pedras, nós em corda e marcas em ossos. A partir de então, passou-se a associar a um conjunto qualquer um número que representa a quantidade de seus elementos. Isto foi um passo importante para a abstração, pois eliminava a idéia concreta que se tinha de número.

Hoje em dia, abordamos o conjunto dos números naturais de forma axiomática. Esse tratamento lógico-dedutivo ocorreu de forma tardia, visto que a geometria recebeu tratamento semelhante 300 anos antes de cristo. O primeiro sistema completo de axiomas para a aritmética foi formulado por Richard Dedekind (1831-1916) em 1888. Outra axiomática foi formulada por Giuseppe Peano (1858-1932) e data de 1891.

Na definição teórica dos números naturais dada no século XIX optou-se por incluir o zero, que representa a ausência de elementos num conjunto, mas há matemáticos, principalmente os teorizadores dos números, que optam por excluir o zero dos números naturais.

Conjunto dos Números Naturais

O conjunto dos números naturais- representado pela letra $\mathbb{N}$- é formado pelos números 0,1,2,3,4,5,...

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$$

No **Maple** podemos definir este conjunto da seguinte forma:

Exemplo

```
> N := {$0..infinity};
```

$$N := \{\ `\$`(0..\infty)\}$$

Podemos definir subconjuntos do conjunto dos números naturais da mesma forma que foi definida acima.

Exemplo

```
> A := {$0..100};
```

$A := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$

Números Inteiros

Os chineses da antiguidade já trabalhavam com a idéia de número negativo, onde calculavam utilizando palitos vermelhos para representar excesso e palitos pretos para representar falta. Mas coube aos hindus a inclusão dos números negativos na matemática. O primeiro registro sistematizado da aritmética dos números negativos que se tem notícia foi feito pelo matemático e astrônomo hindu Brahmagupta (598-?), que já conhecia as regras para às 4 operações com números negativos. Bhaskara(séc. XII), outro matemático e astrônomo hindu, já afirmava que um número positivo tem duas raízes quadradas, uma negativa e outra positiva, e que era impossível extrair a raiz quadrada de um número negativo.

Mas a aceitação desse novo conjunto numérico foi bastante demorada. Para notar isto, basta ver algumas definições que receberam:

- Stifel (1486-1567): Chamava-os de números absurdos.
- Cardano (1501-1576): Dizia que eram números fictícios.
- Descartes (1596-1650): Chamava de falsas as raízes negativas de uma equação.
- F. Viete(1540-1603): Rejeitava os números negativos.

A aceitação dos números inteiros começou a acontecer a partir do século XVIII, quando se passou a interpretá-los geometricamente como sendo seguimentos de retas em direções opostas.

Sobre a origem dos sinais

A idéia de utilizar sinais para representarem perda e ganho teve seu início na observação da prática diária de alguns procedimentos, que eram executados por comerciantes. Veja como faziam tais comerciantes: Suponha que um deles tivesse em seu armazém duas sacas de feijão com 10 kg cada. Se esse comerciante vendesse num dia 8 Kg de feijão, ele escrevia o número 8 com um traço (semelhante ao atual sinal de menos) na frente para não se esquecer de que no saco faltavam 8 Kg de feijão. Mas se ele resolvesse despejar no outro saco os 2 Kg que restaram, escrevia o número 2 com dois traços cruzados (semelhante ao atual sinal de mais) na frente, para se lembrar de que no saco havia 2 Kg de feijão a mais que a quantidade inicial.

Mas o emprego regular do sinal de (+) e de (–) apareceu na aritmética comercial de **João Widman d'Eger**, publicada em 1489, e simbolizavam não a adição ou a subtração, nem tampouco os números positivos ou negativos, mas os excessos e os déficit em problemas de negócio. O uso dos sinais de (+) e (-) de modo a que estamos habituados a fazer ocorreu após a publicação do livro "The Whetstone of Witte", de Robert Record em 1557 na Inglaterra.

O conjunto dos Números Inteiros

Definimos o conjunto dos números inteiros como a reunião do conjunto dos números naturais, o conjunto dos opostos dos números naturais e o zero. Este conjunto é denotado pela letra $\mathbb{Z}$ (Zahlen=número em alemão). Este conjunto pode ser escrito por: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

No **Maple** podemos definir este conjunto da seguinte forma:

Exemplo

```
> Z := {$-infinity..infinity};
                                        Z := {`$`(-∞..∞)}
```

Podemos também definir subconjuntos do conjunto dos inteiros.

Exemplo

```
> Z1 := {$-100..100};
Z1 := {-100, -99, -98, -97, -96, -95, -94, -93, -92, -91, -90, -89, -88, -87, -86, -85, -84, -83, -82, -81, -80,
    -79, -78, -77, -76, -75, -74, -73, -72, -71, -70, -69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58,
    -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36,
    -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14,
    -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
    20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52,
    53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85,
    86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100}
```

Subconjuntos Especiais

A seguir veremos alguns subconjuntos especiais, como o conjunto dos números primos, pares, impares, figurados, triangulares entre outros.

Números primos

Um inteiro p é chamado primo se, e somente se :

i) $p \neq 0$ e $p \neq 1$;

ii) $|p|$é divisível por 1 e por $|p|$.

Podemos citar alguns números primos: -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, 11... .

Alguns livros adotam a definição de número primo considerando o p como sendo inteiro e positivo. Com isto, na sequência de números primos citada acima como exemplo, seriam considerados números primos apenas o 2, 3, 5, 7, 11... . O **Maple** adota o p como inteiro e positivo.

Utilizamos o comando "***ithprime***(n)" para encontrar números primos. A incógnita n indica a posição que o número primo ocupa numa escala crescente, sendo o primeiro número primo 2.

Exemplo

```
> ithprime(1);
                                    2
```

Podemos utilizar o comando ***"seq"*** combinado com o comando ***"ithprime"*** para criar uma sequência só de primos em ordem crescente.

Exemplo

```
> ithprime(1);
                                    2
> seq(ithprime(x), x = 1..20);
        2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71
```

Observação:

O membro $x = 1..20$ no comando ***seq*** do exemplo acima, significa que x assume valores naturais de 1 até 20.

O comando ***isprime*** pode ser usado para verificar se um inteiro positivo é primo ou não.

Exemplo

```
> isprime(17);
                                    true
> isprime(1532649);
                                    false
```

Números pares e números ímpares

Sabemos que se considerarmos um inteiro qualquer teremos duas opções: ou ele será par ou ele será ímpar. Se um inteiro n é par, então $n = 2q$ e se n é ímpar, então $n = 2q + 1$, sendo q também inteiro. Usaremos o comando "***seq****(expressão,intervalo)*"*** para criar ***sequências*** de números pares e ímpares.

Exemplo

```
> seq(2·q, q = -6..6);
              -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12
> seq(2·q + 1, q = -3..10);
              -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21
```

Se quisermos transformar as sequências de números pares e ímpares do exemplo em conjuntos, basta colocar o comando entre chaves. Isto vale para qualquer comando.

Exemplo

```
> {seq(2. q, q =-6 ..6) };
            { -12., -10., -8., -6., -4., -2., 0., 2., 4., 6., 8., 10., 12. }      (1)
> {seq(2·q + 1, q =-3 ..10) };
            { -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 }      (2)
```

Decomposição em fatores primos e divisores de um inteiro

Antes de utilizar os comandos desta secção devemos carregar o pacote ***numtheory*** no Maple, digitando

```
> with(numtheory) :
```

Para decompor um inteiro em fatores primos, utilizamos o comando ***ifactor*** .

Exemplo

```
> ifactor(117);
                                   (3)^2 (13)
> ifactor(-473);
                                   -(11) (43)
```

Podemos encontrar os divisores de um inteiro e a cardinalidade deste conjunto carregando o pacote "***with****(numtheory)*" e utilizando os comandos "***divisors****(número)*" e "***tau(número)***", respectivamente.

Exemplo

```
> with(numtheory) :
> divisors(54);
                                 {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54}
> tau(54);
                                   8
```

Já para encontrar a soma dos divisores de um inteiro utilizamos o comando ***sigma*** .

Exemplo

```
> sigma(54);
                                   120
```

Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum

O aplicativo Maple também tem comandos específicos para determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum.

Máximo Divisor Comum (mdc)

Sejam a e b dois inteiros não conjuntamente nulos. Chama-se máximo divisor comum de a e b o inteiro positivo d ($d > 0$) que satisfaz às condições:

i) d é um divisor comum de a e b, isto é, $d \mid a$ e $d \mid b$;

ii) Se o número natural c é um divisor comum de a e b, então $c \mid d$. Em outras palavras, d é o maior de todos.

No **Maple** utilizamos o comando ***gcd*** para calcular o mdc de dois números.

Exemplo

Calcular o $mdc(42,12)$.

```
> gcd(42, 12);
                                        6                    (1)
```

Podemos definir o conjunto dos divisores de 42 e 12 e efetuar a interseção dos dois conjuntos e verificar a segunda propriedade do mdc.

Exemplo

```
> with(numtheory) :
> D12 := divisors(12);#Divisores de 12.
                         D12 := {1, 2, 3, 4, 6, 12}                 (1)
> D42 := divisors(42);#Divisores de 42.
                       D42 := {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}           (2)
> Interseção := D12 intersect D42; #Divisores comuns.
                         Interseção := {1, 2, 3, 6}                 (3)
> MDC := max(Interseção);#Divisor máximo.
                                MDC := 6                            (4)
```

Vemos que os elementos do conjunto interseção são os divisores comuns de 42 e 12 e que todos eles dividem o 6. Portanto o $mdc(12,42) = 6$, que é o maior de todos.

Para calcular o mdc de dois ou mais números fazemos uso do comando ***igcd*** ou o fato de que $mdc\ (a,b,c) = mdc\ (mdc\ (a,b),c)$.

Exemplo

```
> igcd(10, 35, 6);#Usando diretamente o comando igcd
                                   1                    (1)
> gcd(gcd(10, 35), 6);# Fazendo mdc(mdc(10, 35), 6).
                                   1                    (2)
```

Observações:

Se a, b, c e d são números naturais, então:

• Se d é mdc de a e b, e c é um divisor comum desses números, então $c|d$, de onde segue que o mdc de dois números naturais é único.

• O $mdc(a,b) = mdc(b,a)$.

```
> gcd(69, 33);
                                   3                                   (1)
> gcd(33, 69);
                                   3                                   (2)
```

• $mdc(0,a) = a, mdc(1,a) = 1$ e $mdc(a,a) = a$, onde a pertence aos inteiros

```
> gcd(0, a); gcd(1, a); gcd(a, a);
                                   a
                                   1
                                   a                                   (1)
```

• $a \mid b$ (a divide b) se, e somente se, $mdc(a,b) = a$.

```
> 6/3;# 3|6 (3 divide 6)
                                   2                                   (1)
> gcd(6, 3);
                                   3                                   (2)
```

Mínimo Múltiplo Comum (mmc)

Sejam a e b dois inteiros diferentes de zero. Chama-se mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b o inteiro m ($m > 0$) que satisfaz às condições:

i) $a \mid m$ e $b \mid m$;

ii) se $a \mid c$ e se $b \mid c$, $c > 0$, então m é menor ou igual a c .

No **Maple** utilizamos o comando ***lcm*** para calcular o mmc entre dois ou mais números.

Exemplo

Calcular o $mmc(6,25)$

```
> lcm(6, 25);
                                  150                                  (1)
```

Podemos encontrar o mmc de dois ou mais números utilizando as propriedades **i)** e **ii)**. Como exemplo calcularemos o $mmc(6, 8)$.

Exemplo

```
> M6 := {seq(6·q, q = 1..50)};
M6 := {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102, 108, 114, 120, 126, 132, 138, 144, 150, 156, 162, 168,
    174, 180, 186, 192, 198, 204, 210, 216, 222, 228, 234, 240, 246, 252, 258, 264, 270, 276, 282, 288, 294, 300}
> M8 := {seq(8·q, q = 1..50)};
M8 := {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144, 152, 160, 168, 176, 184, 192, 200, 208, 216,
    224, 232, 240, 248, 256, 264, 272, 280, 288, 296, 304, 312, 320, 328, 336, 344, 352, 360, 368, 376, 384, 392, 400}
> M6interM8 := M6 intersect M8;
              M6interM8 := {24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, 240, 264, 288}
```

No exemplo acima, inicialmente construímos o conjunto dos 50 primeiros múltiplos positivos de 6 e chamamo-lo de M6; depois construímos o conjunto dos 50 primeiros múltiplos positivos de 8 e chamamo-lo de M8 e em seguida fizemos a intersecção desses dois conjuntos encontrando os múltiplos comuns de 6 e 8. Vemos que 8 e 6 dividem todos os elementos de ***M6interM8***, o que corresponde a primeira propriedade, e pela propriedade **ii)** chegamos a conclusão que o $mmc(6,8) = 24$, pois é o menor dos elementos da interseção dos conjuntos dos múltiplos.

Números amigos

Dizemos que p e q são números amigos se e somente se a soma dos divisores positivos de p, menos o divisor p, dá q e a soma dos divisores positivos de q, menos o divisor q, dá p, isto é,

$$s(p) - p = q \text{ e } s(q) - q = p,$$

onde $s(p)$ é a soma dos divisores de p e $s(q)$ é a soma dos divisores de q.

Um exemplo de números amigos são 284 e 220, pois os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110. Efetuando a soma destes números obtemos o resultado 284. Já os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142, efetuando a soma destes números obtemos o resultado 220. Ou seja, $s(220) - 220 = 284$ e $s(284) - 284 = 220$.

A descoberta deste par de números é atribuída a Pitágoras. Houve uma aura mística em torno deste par de números, e estes representaram papel importante na magia, feitiçaria, na astrologia e na determinação de horóscopos.

Outros números amigos foram descobertos com o passar do tempo. Pierre Fermat anunciou em 1636 um novo par de números amigos formados por 17296 e 18416, mas na verdade tratou-se de uma redescoberta pois o árabe Al-Banna (1256 - 1321) já havia encontrado este par de números no fim do século XIII.

Leonahrd Euler, matemático suíço, estudou sistematicamente os números amigos e descobriu em 1747 uma lista de trinta pares, e ampliada por ele mais tarde para mais de sessenta pares. Todos os números amigos inferiores a um bilhão já foram encontrados.

No **Maple,** devemos carregar o pacote *numtheory* (digite ***"with**(numtheory)"*) e usar o comando "***sigma***(expressão)", que serve para efetuar a soma dos divisores de um número, para verificar se dois números são amigos. Serão amigos se "*p:=**sigma**(q) – q*" e "*q:=**sigma**(p) – p*" forem iguais.

Exemplo

```
> with(numtheory) :
> divisors(1184);
                    {1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592, 1184}
> divisors(1210);
                   {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605, 1210}
> sigma(1184);
                                        2394
> sigma(1210);
                                        2394
> sigma(1210) - 1210;
                                        1184
> sigma(1184) - 1184;
                                        1210
```

Portanto 1184 e 1210 são números amigos.

Observações:

- Se a soma dos próprios divisores de um número é igual ao próprio número, dizemos que esse número é egoísta.

Exemplo

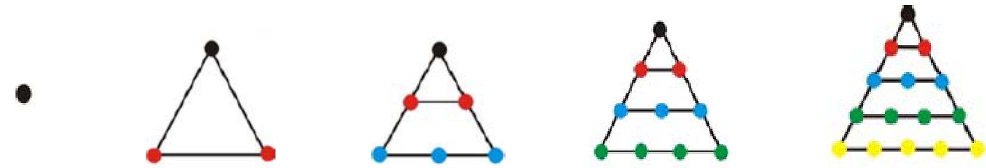
```
> sigma(28) - 28;
                                              28
```

Números Figurados

Na época de Pitágoras ainda se contava usando pedrinhas ou marcas de pontos na areia. Os pitagóricos, como eram chamados os pertencentes à escola fundada por Pitágoras, eram excelentes observadores de formas geométricas. Eles desejavam compreender a natureza íntima dos números, então elaboraram os *números figurados*, que são números expressos como reunião de pontos numa determinada configuração geométrica, isto é, a quantidade de pontos representa um número, e estes são agrupados de formas geométricas sugestivas. Muitos resultados sobre números figurados podem ser descobertos geometricamente.

Números Triangulares

Um *número triangular* é um número natural que pode ser representado na forma de triângulo equilátero. Foi desenvolvido por Gauss em 1788 quando ele tinha somente 10 anos. Para encontrar o n-ésimo número triangular a partir do anterior basta somar-lhe n unidades.



T_1 = 1 ---------------- T_1 = 1 T_3 = 1+2+3 ---------- T_3 = 6

T_2 = 1+2 ------------- T_2 = 3 T_4 = 1+2+3+4 ------ T_4 = 10

$T_5 = 1+2+3+4+5 = 15$ ... $T_n = 1+2+3+\ldots+n$,

e isto implica, pelo somatório dos n primeiros termos de uma P.A, que $T_n = \frac{n+n^2}{2}$.

Exemplo

```
> factor(%);
```

$$\frac{1}{6}\,n\,(n+2)\,(n+1)$$

```
> triangulares := {seq(k·(k+1)/2, k = 1..50)};
triangulares := {1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351,
    378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666, 703, 741, 780, 820, 861, 903, 946, 990, 1035, 1081, 1128, 1176, 1225, 1275}
```

Observações:

- Um *somatório* é um operador matemático que nos permite representar facilmente somas muito grandes ou até infinitas. É representado pela letra grega *sigma* (Σ), e é definido por:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

  que lê-se: somatório de x_i de 1 a n.

- A variável i é o índice do somatório e assume valores inteiros de 1 a n. Os inteiros 1 e n são chamados de *limite inferior* e *limite superior* do índice i, respectivamente.

O comando ***"sum"*** determina o somatório no **Maple**. Para isso faremos "***sum****(expressão,expressão=intervalo)*". Se desejar apenas escrever a notação, então substitua o ***"sum"*** pelo ***"Sum"***.

Exemplo

> $sum(k, k = 1..n);$

$$\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

> $Sum(k, k = 1..n);$

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

O comando ***"factor"*** fatora uma expressão. No **Maple** usamos "***factor****(expressão)*".Podemos utilizar o ***"factor"*** com o símbolo "%", este utiliza o último resultado calculado, substituindo a escrita da expressão.

Exemplo

> $factor\left(\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right);$

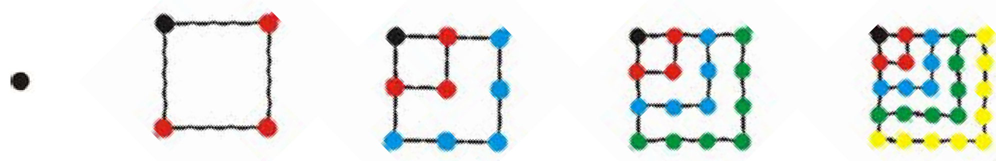
$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

> $factor(\%);$

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

Números Quadrados

Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos.



$Q_1 = 1$ ---------------- $Q_1 = 1$

$Q_2 = 1+3$ -------------- $Q_2 = 4$

$Q_3 = 1+3+5$ ----------- $Q_3 = 9$

$Q_4 = 1+3+5+7$ ------- $Q_4 = 16$

$Q_5 = 1+3+5+7+9 = 25$ ... $Q_n = 1+3+5+7+...+(2n-1)$,

que pelo somatório dos n primeiros termos de uma P.A, fica $Q_n = n^2$.

Exemplo

```
> sum(k^2, k = 1 ..n);
```

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{6}$$

```
> factor(%);
```

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

```
> Sum(k^2, k = 1 ..n);
```

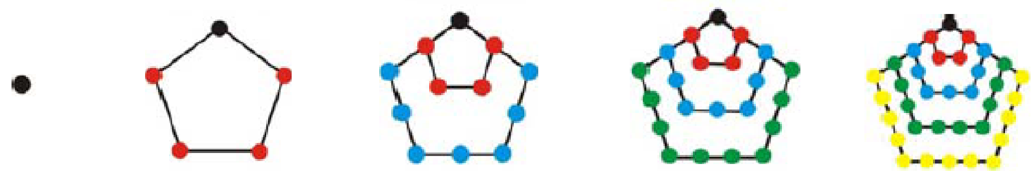
$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

```
> quadrangulares := {seq(k^2, k = 1 ..50)};
quadrangulares := {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576,
    625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025,
    2116, 2209, 2304, 2401, 2500}
```

Os números 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900 são os números triangulares quadrados, isto é, os números que são simultaneamente triangulares e quadrados.

Números Pentagonais

Alguns números naturais podem ser representados na forma de um pentágono.



$P_1 = 1$ ---------------- $P_1 = 1$

$P_2 = 1 + 4$ ----------- $P_2 = 5$

$P_3 = 1 + 4 + 7$ ------ $P_3 = 12$

$P_4 = 1+4+7+10$ ---- $P_4 = 22$.

$P_5 = 1+4+7+10+13 = 25$ … $P_n = 1+4+7+10+\ldots+(3n-2)$,

de onde obtemos que $P_n = \frac{3n^2-n}{2}$.

Para passarmos de um número pentagonal $P(n)$ para o seguinte, $P(n+1)$, precisamos juntar três lados de comprimento igual a $n+1$, não se esquecendo de descontar as duas sobreposições nos cantos (Veja as figuras acima, no início da seção), isto é:

$$P(n+1) = P(n) + 3(n+1) - 2 = P(n) + 3n + 1$$

Assim,

$$\begin{cases} P(1) = 1 \\ P(n+1) = P(n) + (3n+1) \end{cases}$$

Exemplo

> $sum\left(\frac{(3 \cdot k^2 - k)}{2}, k = 1..n\right);$

$$\frac{1}{2}(n+1)^3 - (n+1)^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

> $Sum\left(\frac{(3 \cdot k^2 - k)}{2}, k = 1..n\right);$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}k\right)$$

> $factor\left(\frac{1}{2}(n+1)^3 - (n+1)^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right);$

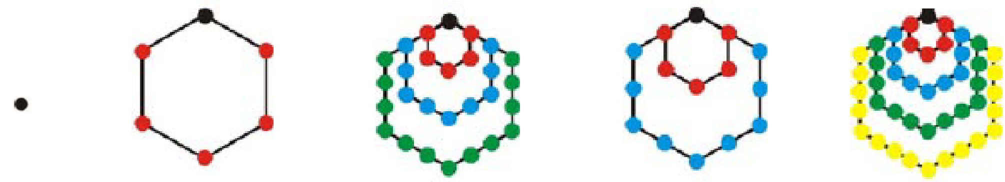
$$\frac{1}{2}n^2(n+1)$$

> $pentagonais := seq\left(\frac{(3 \cdot k^2 - k)}{2}, k = 1..50\right);$

pentagonais := 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425, 477, 532, 590, 651, 715, 782, 8
1001, 1080, 1162, 1247, 1335, 1426, 1520, 1617, 1717, 1820, 1926, 2035, 2147, 2262, 2380, 2501, 2625, 2752, 288
3151, 3290, 3432, 3577, 3725

Números Hexagonais

É semelhante aos casos anteriores, o primeiro número hexagonal é a unidade e o segundo é o menor número de bolas com as quais podemos desenhar um hexágono regular.



A série de números hexagonais é tal que qualquer número é a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 4, como a seguir: 1, 5, 9, 13...

Recapitulando:

$H(1) = 1$
$H(2) = H(1) + 5 = 1 + 5 = 6$
$H(3) = H(2) + 9 = 1 + 5 + 9 = 15$

$$H(4) = H(3) + 13 = 1 + 5 + 9 + 13 = 28$$
$$\dots$$
$$H(n) = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \cdots + (4n - 3),$$

que pela fórmula do somatório dos n primeiros termos de uma P.A., resulta em $H(n) = 2n^2 - n$.

Para chegar a um número hexagonal a partir do seu precedente, isto é, de $H(n)$ para $H(n+1)$, precisamos juntar quatro lados de comprimento igual a $n + 1$, não se esquecendo de descontar as três sobreposições nos cantos (Veja figura acima, no início da seção) , isto é :

$$H(n+1) = H(n) + 4(n+1) - 3 = H(n) + 4n + 1.$$

Daí , temos:

$$\begin{cases} H(1) = 1 \\ \mathrm{H(n+1)} = \mathrm{H(n)} + (4\mathrm{n} + 1) \end{cases}$$

Exemplo

```
> sum(4·k − 3, k = 1 ..n);
                         2 (n + 1)^2 − 5 n − 2
> factor(%);
                              n (2 n − 1)
> Sum(%);
                            ∑ n (2 n − 1)
> hexagonais := {seq(k·(2·k − 1), k = 1 ..50)};
hexagonais := {1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325, 378, 435, 496, 561, 630, 703, 780, 861, 946, 1035, 1128,
    1225, 1326, 1431, 1540, 1653, 1770, 1891, 2016, 2145, 2278, 2415, 2556, 2701, 2850, 3003, 3160, 3321, 3486, 3655, 3828,
    4005, 4186, 4371, 4560, 4753, 4950}
```

Mais Conjuntos Especiais

Nesta seção apresentamos alguns comandos para trabalhar com números racionais e reais.

Números Racionais

Já por volta de 2000 a.C., os egípcios utilizavam frações para representar divisões não exatas. Às vezes, utilizavam apenas frações unitárias (frações cujo numerador é 1) para exprimir essas divisões, por razões não conhecidas.

Contudo, o uso de frações unitárias se estendeu por vários séculos, tanto que ganhou espaço no famoso livro Liber abaci, escrito no século XIII d.C. por Fibonacci, onde fornecia uma tabela de conversão de frações comuns para frações unitárias. Nessa época a representação decimal das frações não era muito usada, na verdade o uso da forma decimal começou a vingar em 1585, quando Simon Stevin (1548-1620) publicou um pequeno texto intitulado De thiende (O décimo), onde ensinava a efetuar com muita facilidade todos os cálculos necessários entre os homens, sem utilizar frações.

Conjunto dos Números Racionais

Os números racionais são aqueles números que podem ser escritos na forma de fração, onde o numerador é um inteiro e o denominador é um inteiro não nulo, e são representados pela letra $\mathbb{Q}$, isto é:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p \text{ e } q \text{ são inteiros } e\ q \text{ não nulo}\right\}.$$

Exemplo

> $Q1 := \left\{seq\left(\frac{seq(k, k=1..15)}{n}, n=1..10\right)\right\}$#subconjunto dos números racionais;

$$Q1 := \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{6}{5}, \frac{6}{7}, \frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}, \frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{10}, \frac{8}{3}, \frac{8}{5}, \frac{8}{7}, \frac{8}{9}, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \frac{9}{7}, \frac{9}{8}, \frac{9}{10}, \frac{10}{3}, \frac{10}{7}, \frac{10}{9}, \frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, \frac{11}{7}, \frac{11}{8}, \frac{11}{9}, \frac{11}{10}, \frac{12}{5}, \frac{12}{7}, \frac{13}{2}, \frac{13}{3}, \frac{13}{4}, \frac{13}{5}, \frac{13}{6}, \frac{13}{7}, \frac{13}{8}, \frac{13}{9}, \frac{13}{10}, \frac{14}{3}, \frac{14}{5}, \frac{14}{9}, \frac{15}{2}, \frac{15}{4}, \frac{15}{7}, \frac{15}{8}\right\}$$

Representação decimal de uma fração

Dado um número racional p/q, onde admitimos que p não é múltiplo de q, representamo-lo na forma decimal dividindo o p pelo q. Se p é múltiplo de q, estamos diante de uma fração aparente, que é um número inteiro.

No **Maple** usamos o comando "***evalf***(*fração, quantidade de algarismos significativos)*", o "***convert****(fração, float, quantidade de algarismos significativos)*" ou colocamos um ponto final no numerador ($a./b$) para representarmos uma fração na forma decimal. Nessa divisão pode ocorrer dois casos:

1) Decimais exatos

Exemplo

```
> Digits := 5;
                              Digits := 5                                  (1)
> 5./25;
                              0.20000                                      (2)
> evalf(35/8, 3);
                              4.38                                         (3)
```

2) Decimais periódicos

Exemplo

```
> Digits := 15;
                              Digits := 15                                 (1)
> 7./6;# Note o arredondamento na décima quinta casa decimal.
                              1.16666666666667                             (2)
> convert(35/9, float, 7);
                              3.888889                                     (3)
```

<u>Observação:</u>

- Se quisermos saber se um número racional na forma fracionária resultará num decimal exato ou periódico após a divisão do numerador pelo denominador, basta decompor o denominador da fração em fatores primos. Daí:

i) Se o denominador contém apenas os fatores 2 ou 5, então a fração equivale a um decimal exato;

Exemplo

```
> ifactor(125);
                              (5)^3                                        (1)
> 78./125;
                              0.6240000000                                 (2)
> ifactor(20);
                              (2)^2 (5)                                    (3)
> 47./20;
                              2.350000000                                  (4)
```

ii) Se o denominador contém algum fator primo diferente de 2 e de 5, então a fração equivale a uma dízima periódica.

Exemplo

```
> ifactor(75);
                                   (3) (5)^2                                    (1)
> evalf(67./75);
                                   0.8933333333                                 (2)
> ifactor(28);
                                   (2)^2 (7)                                    (3)
> evalf(288/28, 15);
                                   10.2857142857143                             (4)
```

Representação fracionária de um número decimal

Agora queremos fazer o procedimento inverso: dado um número racional na forma decimal, queremos escrevê-lo na forma de fração.

Temos dois casos a considerar:

1) Decimal Exato

Basta transformar o número decimal numa fração decimal e simplificar a fração obtida. Por exemplo, $0{,}58 = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$.

Usamos o comando "***convert****(número decimal*, ***fraction***, ***exact****)*" para escrever uma fração na forma decimal no **Maple**.

Exemplo

```
> convert(23.538, fraction, exact);
                                   11769
                                   -----                                        (1)
                                    500
> convert(5.335, fraction, exact);
                                   1067
                                   ----                                         (2)
                                   200
```

2) Decimal Periódico

Já quando queremos representar um número decimal periódico na forma fracionária utilizando o **Maple**, conseguimos obter aproximações até a *n*-ésima casa decimal ou dependendo da quantidade de casas decimais na qual escrevemos o décimal periódico, a fração geratriz da dízima. Utilizamos o comando "***convert****(decimal periódico*, ***fraction***, *n casas exatas)*", onde o campo "***n*** *casas exatas*" indica a quantidade de algarismos significativos na qual a representação decimal da fração, cuja foi obtida como resultado da conversão, confere com a dízima que queríamos converter. Geralmente, para obtermos a fração geratriz da dízima devemos repeti-la até a sexta casa decimal, no caso das dízimas em que o período é composto por um algarismo, ou completar dois ou mais ciclos no caso das dízimas onde o período é composto por mais de um algarismo. Para conferir o resultado bastar utilizar o comando ***evalf***.

Exemplos

```
> convert(1.666666, fraction, 6);
```
$$\frac{5}{3} \tag{1}$$

```
> convert(2.25578578578, fraction, 11);
```
$$\frac{225353}{99900} \tag{2}$$

```
> convert(0.5222222, fraction, 7);
```
$$\frac{47}{90} \tag{3}$$

Números Reais

Por volta de 569 a.C. na ilha de Samos, no nordeste do mar Ergeu (a data pode estar errada por, no máximo, 20 anos) nasceu Pitágoras, responsável pela fundação de uma espécie de seita, chamada escola pitagórica. Para os pitagóricos o universo era matemático e diversos símbolos e números tinham significado espiritual. Os membros da escola pitagórica descobriram que, nem sempre tomando um segmento u como unidade de medida é possível estipular um número p/q, sendo p e q naturais, que representa a quantidade de vezes que u cabe num outro seguimento, digamos $\overline{AB}$. Um exemplo que os levaram a essa conclusão foi a diagonal do quadrado.

Suponhamos, por absurdo, que pudéssemos estipular o número de vezes que l, lado do quadrado, cabe na diagonal d do mesmo. Então teríamos $d = (p/q)l = p/q$, pois estamos considerando l como a unidade de medida. Vamos supor que p/q está na forma irredutível, isto é, $mdc(p,q) = 1$. Pelo teorema de Pitágoras $(p/q)^2 = l^2 + l^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$, isto é, p^2 é par e disto podemos afirmar que p é par, o que algebricamente significa que $p = 2t$. Agora $2q^2 = 4t^2$ e disto segue que q também é par, o que é absurdo, pois $mdc(p,q) = 1$. Portanto não podemos escrever a quantidade de vezes que l cabe em d utilizando apenas números racionais.

A descoberta de que o comprimento da diagonal de um quadrado não podia ser escrito como o quociente de dois naturais, quando considerado o lado desse quadrado como unidade de medida, não foi um motivo de contentamento para os membros da escola pitagórica, já que consideravam os números naturais e as razões entre eles a essência última das coisas. Por este motivo tentaram ocultar esta descoberta, mas eles próprios não podiam negar a existência de tal valor.

Conjunto dos números Reais

O conjunto dos números reais é formado pela união dos números racionais e dos números irracionais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}, \text{ sendo } \mathbb{Q} \cap \mathrm{I} = \emptyset$$

Exemplo

```
> sqrt(2.);
                                1.414213562                                  (1)
> % + ln(4.^2) - 3.56;
                                0.626802284                                  (2)
> surd(log[2.3](56.6) + exp(5.), 3);
                                5.351495626                                  (3)
> evalf(ln(2));
                                0.6931471806                                 (4)
```

Uma operação que efetuamos com certa freqüência, quando nos deparamos com números irracionais da forma $\sqrt[n]{a}$, $a \pm q\sqrt{b}$ ou $q\sqrt{b} \pm t\sqrt{c}$, onde $q, t \in \mathbb{Q}$, a não é uma potência de expoente n *e* b,c não são quadrados perfeitos, situados no denominador, é a racionalização. Se for necessário racionalizar denominadores, o **Maple** possui a estrutura "***rationalize****(expressão)*" para fazer esta tarefa.

Exemplo

$> \dfrac{5}{\mathrm{surd}(2,3)};$

$$\frac{5}{2}\,2^{2/3} \qquad (1)$$

$> \dfrac{89}{\mathrm{sqrt}(2)-\mathrm{sqrt}(5)}; \; rationalize(\%);$

$$\frac{89}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$-\frac{89}{3}\sqrt{2}-\frac{89}{3}\sqrt{5} \qquad (2)$$

$> n := \dfrac{(\mathrm{surd}(25,4)+\ln(2))}{2+35\cdot\mathrm{sqrt}(7)};$

$$n := \frac{\sqrt{5}+\ln(2)}{2+35\sqrt{7}} \qquad (3)$$

$> rationalize(n);$

$$\frac{1}{8571}\left(\sqrt{5}+\ln(2)\right)\left(-2+35\sqrt{7}\right) \qquad (4)$$

Observação:

- Veja que quando o denominador contém apenas $\sqrt[n]{a}$ a racionalização é feita automaticamente.

Alguns números irracionais notáveis

O número π

O π é o valor da razão constante entre o perímetro de qualquer circunferência e seu diâmetro, ou equivalentemente, é a medida de uma circunferência cujo diâmetro é exatamente 1. Esta razão já era conhecida por alguns povos antes do nascimento de cristo, claro que com aproximações não muito boas, mas sabiam que se tratava de um valor maior do que 3. Por exemplo, numa tabuleta cuneiforme babilônica que data de 4 mil anos atrás, estava proposto sem explicação e sem notação algébrica uma fórmula de onde se concluía que o valor de π era 3,125. Outros povos como os egípcios e os gregos também se preocuparam com o valor de π e obtiveram aproximações um pouco melhores para o seu valor.

Ao longo dos anos foram criadas diversas fórmulas para calcular o valor de π, que em geral utilizam séries infinitas, produtos infinitos ou frações infinitas, não existindo uma expressão finita simples para representá-lo, como provou Ferdinand Lindemann em 1882, sendo por este motivo π chamado de transcendental (Para ver algumas dessas fórmulas, consulte o Almanaque das Curiosidades Matemáticas do Ian Stewart). Mas existem números racionais que permitem obter aproximações para π, como 22/7, que está errado a partir da terceira casa decimal , e 355/113, que confere com o valor de π até a 7ª casa.

Exemplos

> $evalf(\mathrm{Pi}, 20);$

$$3.14159265358979323846 \quad (1)$$

> $\frac{22.}{7}; \frac{355.}{113}; evalf\left(\frac{1068966896}{340262731}, 21\right);$

$$3.142857143$$
$$3.141592920$$
$$3.14159265358979323539 \quad (2)$$

Podemos obter outros números racionais que são aproximações para π usando o comando ***convert***, visto na seção números racionais.

Exemplo

```
> a := evalf(Pi, 15);# Valor exato de π até a décima terceira casa decimal
```
$$a := 3.14159265358979 \tag{1}$$

```
> c := convert(a, fraction, 16);# Valor racional aproximado de π
```
$$c := \frac{69305155}{22060516} \tag{2}$$

```
> evalf(c, 17);
```
$$3.1415926535897891 \tag{3}$$

Como exercício, tente obter outras aproximações racionais de π.

O número *e*

O número e é a base dos logaritmos naturais e seu valor é aproximadamente 2,7182818284. Podemos observar o seu surgimento em problemas de cunho econômico, por exemplo. Considere a função $f(n) = (1 + 1/n)n$, que está definida para n natural não nulo. Quando vamos atribuindo valores para n, observamos que $2 \leq f(n) < 3$, para todo n natural. Veja a tabela a seguir:

n	1	2	3	4	5	6	...
f(n)	2	2,25	2,37	2,44	2,48	2,52	...

Assim quando atribuímos valores muito altos para n, $f(n)$ se aproxima do número irracional 2,7182818284, que foi apelidado de e em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), o primeiro a provar que o $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, conhecido como limite exponencial fundamental .

Exemplo

```
> evalf(exp(1), 20);
```
$$2.7182818284590452354 \tag{1}$$

```
> assume(a < 0 or a > 0) : ln(exp(a));
```
$$a\sim \tag{2}$$

```
> evalf((exp(Pi) - exp(-Pi))/2);
```
$$11.54873936 \tag{3}$$

Observação:

- No exemplo acima utilizamos a rotina ***assume***, que serve para estabelecer as propriedades de uma variável e estabelecer relações entre as mesmas (desigualdade, igualdade etc.).

```
> assume(n < 0 );
> sqrt(n^2);
                                  -n~                                  (1)
> assume(a > 0);
> abs(a);
                                  a~                                   (2)
```

- Utilizamos também o operador lógico ***or***(ou). Mais à frente, na seção sobre função constituída por mais de uma sentença, veremos o outro operador, que é o ***and***(e).

Números Complexos

A aceitação da raiz quadrada de números negativos como solução de uma equação teve seu início com os estudos de métodos que permitissem resolver equações cúbicas e quárticas. A primeira obra importante a apresentar raízes de números negativos como solução de uma equação foi escrita pelo matemático Girolamo Cardano(1501-1576) em 1539, cujo título era *Ars Magna*. Nesta obra Cardano revela a solução de equações cúbicas e quárticas.

Mesmo Cardano tendo admitido raízes quadradas de números negativos como solução de algumas equações em sua obra, não sabia o que essas soluções realmente representavam e não deu à devida importância a estes resultados. O primeiro matemático a dar importância as raízes quadradas de números negativos foi Rafael Bombeli(1526-1572), que definiu regras de multiplicação e adição para estes "números" após ter estudado a fundo o trabalho de Cardano, principalmente os casos que levavam a raízes quadradas de números negativos. Mas a primeira obra cujo assunto era realmente os números complexos veio em 1831, que escrita por Gauss (1777-1855) foi de onde surgiu o termo "números complexos". Nesta obra Gauss explica de maneira detalhada como desenvolver os números complexos a partir de uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano. E finalmente em 1837, Sir William Rowam Hamilton(1805-1865) reconheceu os números complexos como pares ordenados, reescrevendo os resultados obtidos de forma geométrica por Gauss na forma algébrica.

O conjunto dos Complexos

Ao contrário dos números reais, os complexos são números bidimensionais, ou seja, são pares ordenados de números reais. Geometricamente falando os complexos não podem ser representados numa única reta como os reais. Portanto z é um número complexo se, e somente se, z é da forma (x, y), que mais comumente representamos pela forma algébrica $z = x + yi$, onde o real x é chamado de parte real de z e o real y é chamado de parte imaginária de z, com i valendo $\sqrt{-1}$. Observe que o -1 não é um valor unidimensional, ele é apenas um elemento do subconjunto de pontos do plano cartesiano que são da forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, que são assim representados por se comportarem como os reais quando realizadas as operações de adição e multiplicação especialmente definidas para os números complexos. Um dos dois valores possíveis para $\sqrt{-1}$=$\sqrt{(-1{,}0)}$ é o número complexo $(0{,}1)$, que por definição é o valor de i, isto é, $i = (0{,}1)$.

Operações

Em sua forma algébrica, a adição, subtração e multiplicação de números complexos são feitas de maneira análoga à que aprendemos em álgebra, ficando atento apenas às potências de i que surgem em decorrência da multiplicação, onde essas potências assumem apenas os quatro valores $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, repetindo-se esses valores para os próximos expoentes, isto é, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e assim segue.

A divisão de complexos é feita pela multiplicação do conjugado do denominador pelo próprio denominador e pelo numerador da fração que representa essa divisão, lembrando que para obter o conjugado de um número complexo basta trocar o sinal da parte imaginária.

A unidade imaginária i é representada pela letra maiúscula I no **Maple**. Como conseqüência, para inserir um número complexo z no **Maple** escrevemos $z = a + b\mathrm{I}$, ao invés de $z = a + bi$.

Exemplo

> $z := 5 + 4 \cdot I;$

$$z := 5 + 4\,\mathrm{I} \tag{1}$$

> $w := 3 + I;$

$$w := 3 + \mathrm{I} \tag{2}$$

> $z + w;$

$$8 + 5\,\mathrm{I} \tag{3}$$

> $w - z;$

$$-2 - 3\,\mathrm{I} \tag{4}$$

> $z \cdot w;$

$$11 + 17\,\mathrm{I} \tag{5}$$

> $\frac{z}{w};$

$$\frac{19}{10} + \frac{7}{10}\,\mathrm{I} \tag{6}$$

Podemos usar os comandos “***Re**(complexo)*” e “***Im**(complexo)*” para encontrarmos a parte real e imaginária de um número complexo, respectivamente.

Exemplo

> $z := -5 + 4 \cdot I;$

$$z := -5 + 4\,\mathrm{I} \qquad (1)$$

> $\mathrm{Re}(z);$

$$-5 \qquad (2)$$

> $\mathrm{Im}(z);$

$$4 \qquad (3)$$

Se quisermos, podemos visualizar como está definida a adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos no próprio **Maple**. Observe no exemplo abaixo, que para fazer o **Maple** realizar a operação desejada usamos o comando "***evalc****(expressão)*", que avalia expressões no conjunto dos complexos.

Exemplo

> $z := a + b \cdot I;$

$$z := a + \mathrm{I}\, b \qquad (1)$$

> $w := c + d \cdot I;$

$$w := c + \mathrm{I}\, d \qquad (2)$$

> $adição := z + w : evalc(\%);$

$$a + c + \mathrm{I}\,(b + d) \qquad (3)$$

> $subtração := z - w : evalc(\%);$

$$a - c + \mathrm{I}\,(b - d) \qquad (4)$$

> $multiplicação := z \cdot w : evalc(\%);$

$$a\,c - b\,d + \mathrm{I}\,(a\,d + b\,c) \qquad (5)$$

> $divisão := \frac{z}{w} : evalc(\%);$

$$\frac{a\,c}{c^2 + d^2} + \frac{b\,d}{c^2 + d^2} + \mathrm{I}\left(\frac{b\,c}{c^2 + d^2} - \frac{a\,d}{c^2 + d^2}\right) \qquad (6)$$

O comando "***conjugate****(complexo)*" nos permite obter o conjugado de um número complexo qualquer.

Exemplo

> $z := -5 + 3 \cdot I;$

$$z := -5 + 3\,\mathrm{I} \qquad (1)$$

> $j := a + b \cdot I;$

$$j := a + \mathrm{I}\, b \qquad (2)$$

> $conjugate(z);$

$$-5 - 3\,\mathrm{I} \qquad (3)$$

> $conjugate(j); evalc(\%);$

$$\overline{a + \mathrm{I}\, b}$$

$$a - \mathrm{I}\, b \qquad (4)$$

Representação geométrica dos complexos

Como todo complexo z é da forma (a, b), com a e $b \in \mathbb{R}$, e sabemos que a cada par ordenado de números reais está associado um único ponto do plano, podemos associar cada número complexo $z = (a, b) = a + bi$ a um único ponto **P** de coordenadas (a, b) do plano cartesiano. Para tanto, adota-se por convenção que o eixo das abscissas será aonde marcaremos a parte real (a) e o eixo das ordenadas será aonde marcaremos a parte imaginária (b). O plano cartesiano onde estão representado os números complexos é chamado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss e o ponto **P** é chamado de afixo ou imagem geométrica do complexo z.

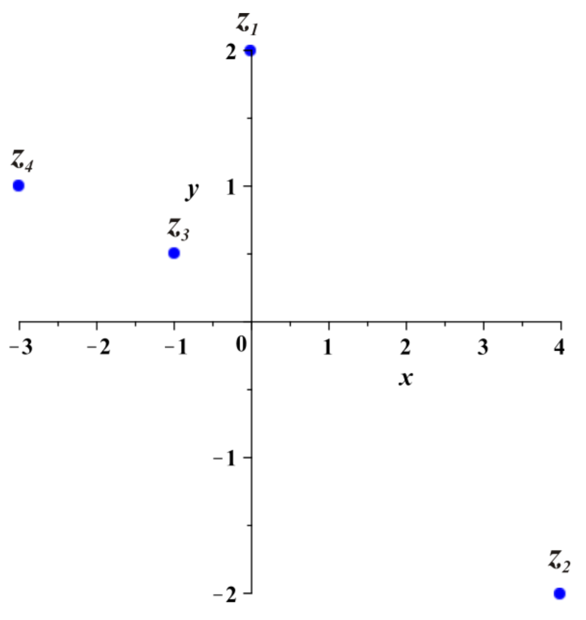
No Maple, usaremos o comando "***complexplot****(complexo, opções)*", que faz parte do pacote ***plots***, para representar geometricamente um número complexo, onde *complexo* pode ser um número complexo ou uma lista de números complexos (números complexos entre colchetes e separados por vírgula).

Exemplo

```
> with(plots) :
> z1 := 2·I; z2 := 4 − 2·I; z3 := -3 + I; z4 := -1 + 1/2·I;
```

$$z1 := 2\,I$$
$$z2 := 4 - 2\,I$$
$$z3 := -3 + I$$
$$z4 := -1 + \frac{1}{2}\,I \qquad (1)$$

```
> complexplot([z1, z2, z3, z4], style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 17, color = blue) :
```



Produto Cartesiano

Antes de trabalharmos com produto cartesiano lembraremos o que é o plano cartesiano.

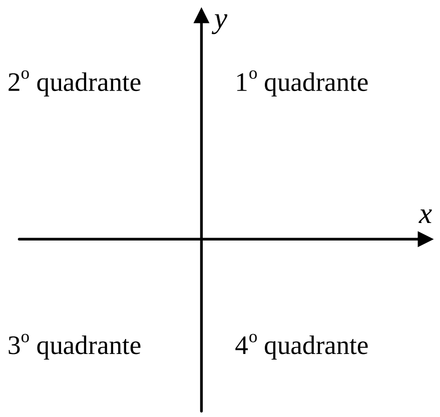
Chama-se Sistema de Coordenadas no plano cartesiano ou espaço cartesiano ou plano cartesiano um esquema reticulado necessário para especificar pontos num determinado "espaço" com dimensões. Cartesiano é um adjetivo que se refere ao matemático francês e filósofo Descartes que, entre outras coisas, desenvolveu uma síntese da álgebra com a geometria euclidiana. Os seus trabalhos permitiram o desenvolvimento de áreas científicas como a geometria analítica, o cálculo e a cartografia.

A idéia para este sistema foi desenvolvida em 1637 em duas obras de Descartes:

- Discurso sobre o método; Na segunda parte, Descartes apresenta a ideia de especificar a posição de um ponto ou objeto numa superfície, usando dois eixos que se interceptam.
- La Géométrie . Onde desenvolve o conceito que apenas tinha sido referido na obra anterior.

É dito também em outros textos que Descartes apenas se limitou a apresentar as idéias fundamentais sobre a resolução de problemas geométricos com utilização da Álgebra, não tendo feito qualquer referência sobre planos ortogonais entre outras coisas.

O plano cartesiano consiste em dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado de eixo das abscissas e o vertical de eixo das ordenadas. O plano cartesiano foi desenvolvido por Descartes no intuito de localizar pontos num determinado espaço. As disposições dos eixos no plano formam quatro quadrantes, mostrados na figura a seguir:



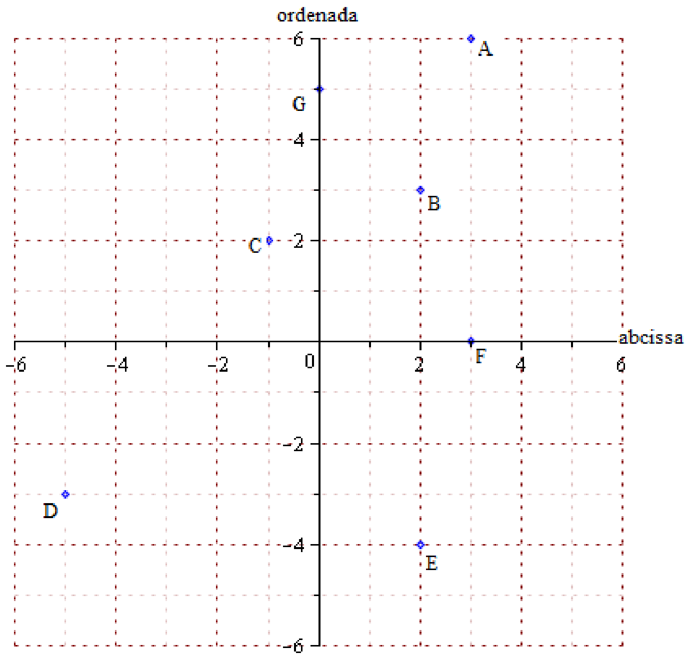
O encontro dos eixos é chamado de origem. Cada ponto do plano cartesiano é formado por um par ordenado (x , y), onde x é a abscissa e y é a ordenada.

Marcando pontos no plano cartesiano

Dados os pontos A(3,6), B(2,3), C(-1,2), D(-5,-3), E(2,-4), F(3,0), G(0,5), represente-os no plano cartesiano.

Marcando o ponto A(3,6):
Primeiro: localiza-se o ponto 3 no eixo das abscissas
Segundo: localiza-se o ponto 6 no eixo das ordenadas
Terceiro: Traçar a reta perpendicular aos eixos, o encontro delas será o local do ponto.

Os outros pontos são representados de forma análoga.



O sistema de coordenadas cartesianas possui inúmeras aplicações, desde a construção de um simples gráfico até os trabalhos relacionados à cartografia, localizações geográficas, pontos estratégicos de bases militares, localizações no espaço aéreo, terrestre e marítimo.

Considerando os conjuntos A e B, chamamos de **Produto cartesiano** de A por B ($A \times B$) o conjunto de todos os pares ordenados (x,y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Por exemplo, temos o conjunto "A" formado pelos seguintes elementos {1, 2, 3, 4} e o conjunto "B" formado pelos elementos {2, 3}, o produto entre eles será o resultado de A × B, considerando que nos pares ordenados, formados pelo produto, a ordem seja a seguinte:

Os elementos de A devem assumir a posição da abscissa, e os elementos de B da ordenada.

Portanto, temos que A × B:

{(1, 2), (2, 2), (3, 2); (4, 2); (1, 3); (2, 3); (3, 3); (4, 3)}

Também podemos realizar o produto de B x A e verificar que os pares formados são diferentes, concluindo que A x B ≠ B x A. Observe:

B x A={(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4)}

Observe que temos a formação de 8 pares ordenados nas duas multiplicações. Isso decorre do fato de que o conjunto A é formado por 4 elementos e o conjunto B por dois elementos. Assim sendo, constituímos a multiplicação:

$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$
$n(A \times B) = 4 \cdot 2$
$n(A \times B) = 8$

Vamos estabelecer os pares ordenados relativos às seguintes operações: A^2 e B^2.
Seja A = {1, 2, 3, 4} e B = {2, 3}. Então:

A² = **A** × **A** = {(1, 1); (2, 1); (3, 1); (4, 1); (1, 2); (2, 2); (3, 2); (4, 2); (1, 3); (2, 3); (3, 3); (4, 3); (1, 4); (2, 4); (3, 4); (4, 4)}

B² = **B** × **B** = {(2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3)}

Para trabalharmos com o produto cartesiano no **Maple** precisaremos "chamar os pacotes" *combinat* e *cartprod* digitando ***"with(****combinat,cartprod****)".***

Exemplo

```
> restart : with(plots) :
> with(combinat, cartprod) :
> A := {a, b, c}; B := {a, d, n, r, u};
                                        A := {a, b, c}
                                        B := {a, d, n, r, u}
```

O comando **"cartprod"** faz a interação entre duas ou mais listas.

Para o utilizarmos escreveremos no maple: "*nome:=**cartprod**([lista1,lista2]);while not nome$_{finished}$ do nome$_{nextvalue}$() end do*" que faz o produto cartesiano de duas listas.

Exemplo

> $C := cartprod([A, B]);$

$$C := table([finished = false, nextvalue = \mathbf{proc}()\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}])$$

> **while not** $C_{finished}$ **do** $C_{nextvalue}()$ **end do**;

$$[a, a]$$
$$[a, d]$$
$$[a, n]$$
$$[a, r]$$
$$[a, u]$$
$$[b, a]$$
$$[b, d]$$
$$[b, n]$$
$$[b, r]$$
$$[b, u]$$
$$[c, a]$$
$$[c, d]$$
$$[c, n]$$
$$[c, r]$$
$$[c, u]$$

Vejamos agora um exemplo com outros elementos no conjunto.

Exemplo

> $E := \{1, 2, 3\}; F := \{0, 1, 2\};$

$$E := \{1, 2, 3\}$$
$$F := \{0, 1, 2\}$$

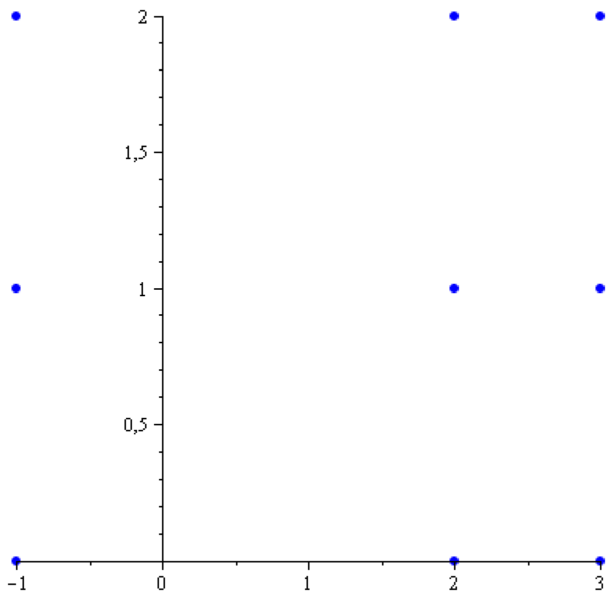
> $G := cartprod([E, F]);$**while not** $G_{finished}$ **do** $G_{nextvalue}()$ **end do**;

$$G := table([finished = false, nextvalue = \mathbf{proc}()\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}])$$
$$[1, 0]$$
$$[1, 1]$$
$$[1, 2]$$
$$[2, 0]$$
$$[2, 1]$$
$$[2, 2]$$
$$[3, 0]$$
$$[3, 1]$$
$$[3, 2]$$

O comando **"*pointplot*"** representa os pontos no gráfico. Então, escreveremos "***pointplot***(*pontos,opções*)" onde os pontos no **Maple** são escritos dentro do colchetes em vez de parênteses como usualmente vemos. Temos também a opção de escolher a cor e o símbolo que representará esse novo ponto, como ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo

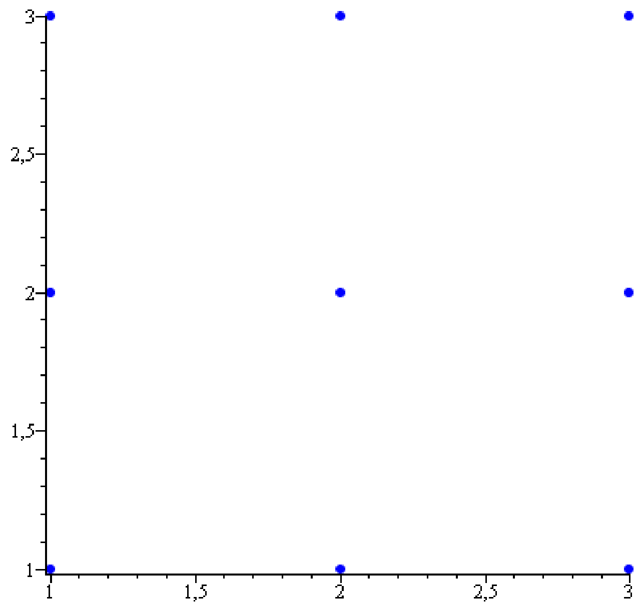
```
> pointplot({[-1, 0], [-1, 1], [-1, 2], [2, 0], [2, 1], [2, 2], [3, 0], [3, 1], [3, 2]}, color = blue, symbol = solidcircle,
    symbolsize = 15);
```



Uma segunda maneira de escrever o cálculo e representar esses pontos é escrevendo os mesmos em forma de matriz e representá-los em sequência.

Exemplo

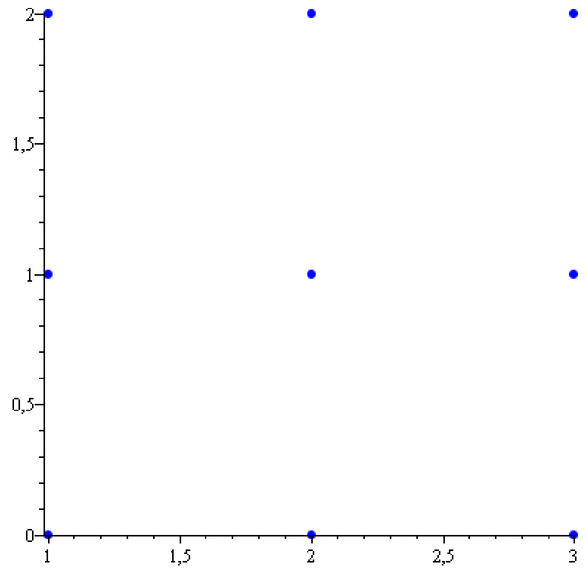
```
> for i to 3 do for j to 3 do G[i, j] := [E[i], F[j]] end do end do;
> pointplot({seq(seq([k, n], k = 1 ..3), n = 1 ..3)}, color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 15);
```



Um terceiro modo de fazer o produto cartesiano e representá-lo é dentro do comando "***pointplot***" calculando o produto por meio de sequência.

Exemplo

```
> pointplot({seq(seq(G[i, j], i = 1 ..3, ), j = 1 ..3)}, color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 15);
```



Relações e Funções

Dados dois conjuntos A e B , dá-se o nome de relação R de A em B a qualquer subconjunto de $A \times B$.

R é a relação de A em B $\Leftrightarrow$ R $\subset$ $A \times B$.

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se função (ou aplicação) de A em B, representada por $f: A \rightarrow B$; $y = f(x)$, a qualquer relação binária que associa a cada elemento de A, um único elemento de B. Portanto, para que uma relação de A em B seja uma função, exige-se que a cada x pertencente a A esteja associado um único y pertencente a B, podendo entretanto existir y pertencente a B que não esteja associado a nenhum elemento pertencente a A .

<u>Observação</u>

- Na notação $y = f(x)$, entendemos que y é imagem de x pela função f, ou seja, y está associado a x através da função f.

Exemplo

f(x) = 4x + 3
f(2) = 4.2 + 3 = 11. Portanto, 11 é imagem de 2 pela função f.
f(5) = 4.5 + 3 = 23. Portanto 23 é imagem de 5 pela função f.

Para definir uma função, necessitamos de dois conjuntos (Domínio e Contradomínio) e de uma fórmula ou uma lei que relacione cada elemento do domínio a um e somente um elemento do contradomínio.

Funções

Nesta seção estudaremos os pontos principais de uma série de importantes funções que abordamos no ensino médio, tais como: função do 1º grau, do 2º grau e exponencial. Vamos também construir o gráfico de todas essas funções. Alguns comandos necessários para executar esta ação, como o "***display***", por exemplo, precisam do pacote "***with***(*plots*)".

Função constante

Uma função é dita constante quando é do tipo f(x) = k , onde k é um valor qualquer independente de x.

Exemplo

a) f(x) = 5

b) f(x) = -3

Observações:

- Na notação y = f(x) , entendemos que y é imagem de x pela função f, ou seja: y está associado a x através da função f.
- O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x.
- Vamos ver agora como podemos construir um gráfico de uma função constante no Maple. Primeiramente precisamos definir essa função.Definiremos qualquer função no Maple como **"***nome*:=*variável da função* → *lei de formação***".**

Exemplo

```
> f := x→k;
```

$$f := x \to k$$

Utilizamos acima a generalização da função constante, mas podemos substituir o k por um valor real, faremos isso abaixo, então:

> $f := x \rightarrow k;$

$$f := x \rightarrow k$$

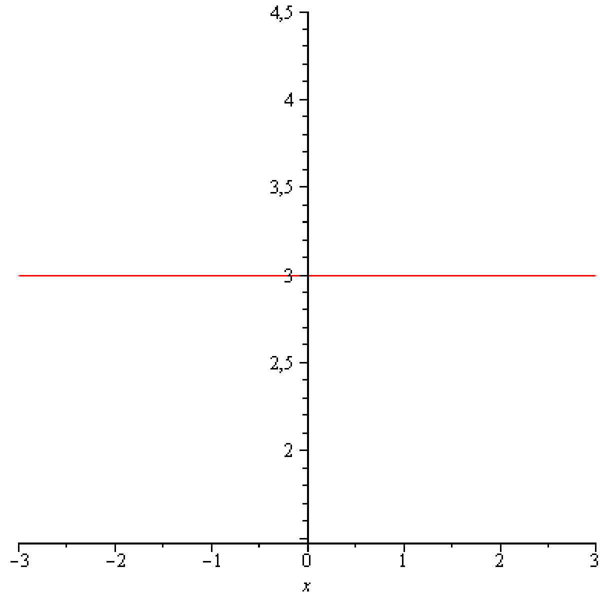
> $k := 3;$

$$k := 3$$

A partir de agora o **k** irá assumir sempre o valor inteiro 3.

Vamos então representar esse gráfico. Primeiramente carregamos o pacote *plots*, digitando "***with***(*plots*)", e depois escrevemos "***plot***(*f*(*variável*),*variável*=*intervalo*);". Então:

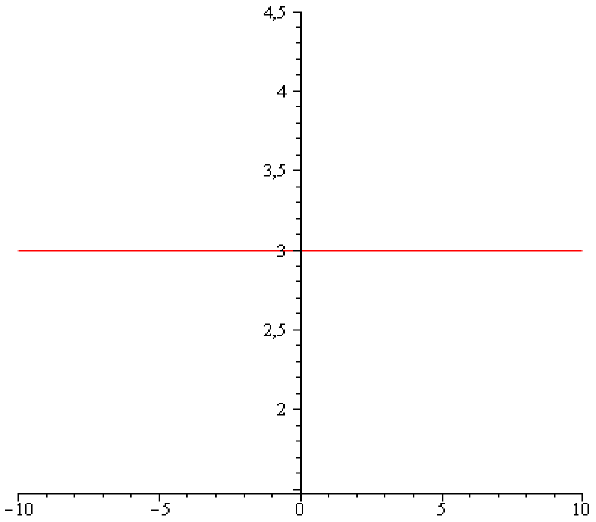
> $plot(f(x), x = -3..3);$



Podemos perceber que a parte do intervalo, significa de onde irá começar a representação no gráfico e onde irá terminar.

Podemos também utilizar o valor já dado a k, se fizermos isso apenas necessitaremos escrever f(x), veja:

```
> plot(f(x));
```



Podemos perceber que nesse caso o intervalo de representação da função será determinado pelo próprio **Maple**.

Observação:

- O **Maple** não aceita nenhum nome dado dentro do programa como f(x), pois o mesmo já o considera como função e a restringe somente para essa utilidade.

Função do 1º grau

Função do 1º grau: Uma função é dita do 1º grau, quando é do tipo f(x) = ax + b, onde $a \neq 0$.

Propriedades:

1) o gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma reta.
2) na função f(x) = ax + b, se b = 0, f é dita linear e se b ≠ 0 f é dita afim.
3) o gráfico intercepta o eixo x na raiz da equação f(x) = 0.
4) o gráfico intercepta o eixo y no ponto (0 , b), onde b é chamado coeficiente linear.
5) o valor a é chamado coeficiente angular e dá a inclinação da reta.
6) se $a > 0$, então f é crescente.
7) se $a < 0$, então f é decrescente.
8) quando a função é linear (f(x) = ax), o gráfico é uma reta que sempre passa na origem.

Exemplo

Representando graficamente uma função afim.

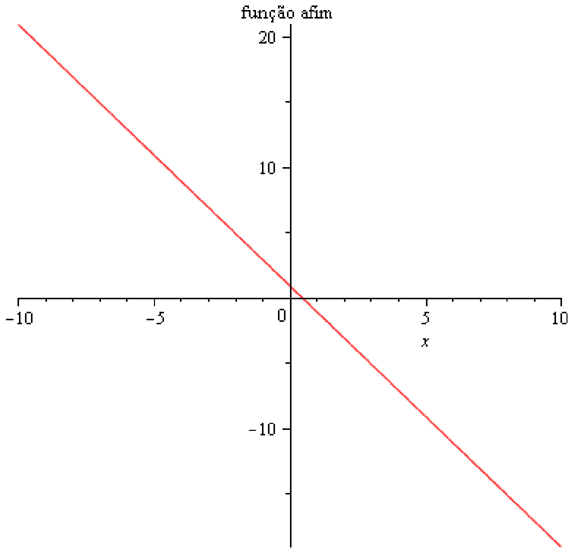
```
> f2 := x→a·x + b;
```

$$f2 := x \rightarrow a\,x + b$$

```
> a := −2; b := 1; plot(f2(x), x=−10..10, title = "função afim", numpoints = 5000);
```

$$a := -2$$

$$b := 1$$



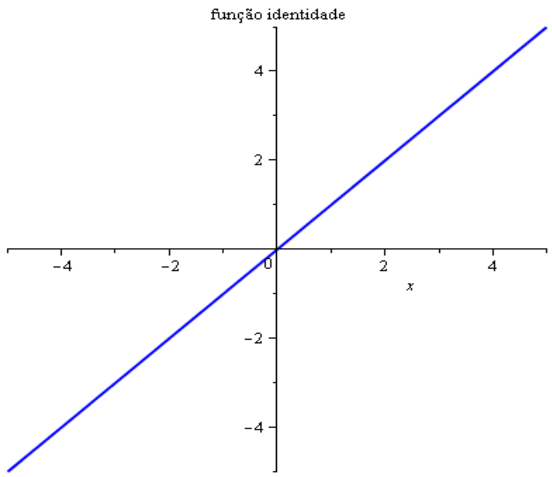
Outra função que podemos destacar é a identidade. Esta é representada por f(x) = x, ou seja, para todo valor de x , f(x) também assumirá esse valor. Com isso sempre teremos uma reta crescente e sua raiz passando pela origem. No **Maple** escrevemos "*nome:=x → x*", definindo assim a função identidade e "***plot***(*nome,x=intervalo,opções*)" para a sua execução gráfica.Vejamos sua representação gráfica no exemplo abaixo.

Exemplo

```
> with(plots) :
> f3 := x→x;
```

$$f3 := x \rightarrow x$$

```
> plot(f3(x), x=−5..5, color = blue, thickness = 2, title = "função identidade");
```



Resolvendo Equações Lineares de 1º grau

> "*Assim como o Sol empalidece as estrelas com o seu brilho, um homem inteligente eclipsa a glória de outro homem nos concursos populares, resolvendo os problemas que este lhe propõe*".
>
> **François Viète**

Este texto da Índia antiga fala de um tempo muito popular dos matemáticos hindus da época: a solução de quebra-cabeças em competições públicas, em que um competidor propunha problemas para outro resolver.

Era muito difícil a Matemática nesse período. Sem nenhum sinal, sem nenhuma variável, somente alguns poucos sábios eram capazes de resolver os problemas, usando muitos artifícios e trabalhosas construções geométricas. Hoje, temos a linguagem exata para representar qualquer quebra-cabeça ou problema.Basta traduzi-los para o idioma da Álgebra: a equação.

Equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. A palavra "equação" vem do latim equatione, equacionar, que quer dizer igualar, pesar, igualar em peso. E a origem primeira da palavra "equação" vem do árabe adala, que significa "ser igual a", de novo a idéia de igualdade. Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras. Por isso na língua portuguesa existe uma expressão muito usada: "o x da questão". Ela é utilizada quando temos um problema dentro de uma determinada situação. Matematicamente, dizemos que esse x é o valor que não se conhece.

A primeira referência a equações de que se têm notícias consta do papiro de Rhind, um dos documentos egípcios mais antigos que tratam de Matemática, escrito há mais ou menos 4000 anos.

Como os egípcios não utilizavam a notação algébrica, os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos.

Os gregos resolviam equações através de Geometria, , realizando e relatando inúmeras descobertas importantes para a Matemática, mas na parte que abrangia a álgebra, foi Diofanto de Alexandria que contribuiu de forma satisfatória na elaboração de conceitos teóricos e práticos para a solução de equações:

Diofanto foi considerado o principal algebrista grego, há de se comentar que ele nasceu na cidade de Alexandria localizada no Egito, mais foi educado na cidade grega de Atenas. As equações eram resolvidas com o auxílio de símbolos que expressavam o valor desconhecido. Observe o seguinte problema:

"Aha, seu total, e sua sétima parte, resulta 19".

Note que a expressão Aha indica o valor desconhecido, atualmente esse problema seria escrito com o auxílio de letras, as mais comuns x, y e z. Veja a representação do problema utilizando letras:

$$x + \frac{x}{7} = 19.$$

“Qual o valor de Aha, sabendo aha mais um oitavo de aha resulta 9?”

$$x + \frac{x}{8} = 9$$

Na lápide do túmulo de Diofanto foi escrito uma equação que relata sua vida, e o seu resultado revela a idade que tinha quando faleceu.

"Aqui jaz o matemático que passou um sexto da sua vida como menino. Um doze avo da sua vida passou como rapaz. Depois viveu um sétimo da sua vida antes de se casar. Cinco anos após nasceu seu filho, com quem conviveu metade da sua vida. Depois da morte de seu filho, sofreu mais 4 anos antes de morrer". De acordo com esse enigma, Diofanto teria 84 anos

Mas foram os árabes que, cultivando a Matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. Para representar o valor desconhecido em uma situação matemática, ou seja, em uma equação, os árabes chamavam o valor desconhecido em uma situação matemática de “coisa”. Em árabe, a palavra “coisa” era pronunciada como xay. Daí surge o x como tradução simplificada de palavra “coisa” em árabe.

No trabalho dos árabes, destaca-se o de Al-Khowarizmi (século IX), que resolveu e discutiu equações de vários tipos.

Al-Khowarizmi é considerado o matemático árabe de maior expressão do século IX. Ele escreveu dois livros que desempenharam importante papel na história da Matemática. Num deles, Sobre a arte hindu de calcular, Al-Khowarizmi faz uma exposição completa dos numerais hindus. O outro, considerado o seu livro mais importante, Al-jabr wa’l mugãbalah, contém uma exposição clara e sistemática sobre resolução de equações.

As equações ganharam importância a partir do momento em que passaram a ser escritas com símbolos matemáticos e letras. O primeiro a fazer isso foi o francês François Viète, no final do século XVI. Por esse motivo é chamado “pai da Álgebra”.

Para resolvermos equações no **Maple** utilizaremos o comando “***solve****(equação,variável)*” . As respostas dadas em fração pelo comando “***solve***” podem ser colocadas em números decimais utilizando o comando “***evalf*** ”.Podemos utilizar também o “***fsolve****(equação,variável)*” que nos apresenta raízes aproximadas utilizando a representação por pontos flutuantes ou como conhecemos , as casas decimais . Não obrigatoriamente precisamos dar nome as equações, mas teremos que escrevê-las toda vez que quisermos falar dela se não a fizermos.

Exemplo

```
> restart:
> eq1 := 5·x - 11 = 3;
```

$$eq1 := 5\,x - 11 = 3$$

```
> solve( eq1 );
```

$$\frac{14}{5}$$

```
> eq2 := 5·(x - 3) + 4·(3·x - 1) = 6·x + 15;
```

$$eq2 := 17\,x - 19 = 6\,x + 15$$

```
> solve(eq2);
```

$$\frac{34}{11}$$

Inequações

Sabendo agora representar suas contas por letras, houve outra necessidade a ser preenchida: quando não queríamos saber o valor da incógnita e sim a partir de que valor posto no lugar da incógnita a afirmação era verdadeira.

Exemplo

Que valores de satisfazem a desigualdade: $x + 2 \le 7$

R: $x \le 5$, logo para todos os valores que substituirmos em x que forem menor ou igual a 5 a inequação será válida.

Inequação é uma sentença matemática aberta, com uma ou mais incógnitas, expressas por uma desigualdade, diferente da equação, que representa uma igualdade. Elas são representadas através de relações que não são de equivalência. Por exemplo:

$$ax + b \ge 0\ ,\ ax + b > 0\ ,\ ax + b \le 0 \text{ ou } ax + b < 0 \text{ (com } a\ ,\ b \in \text{reais e } a \neq 0)$$

Para solucionarmos as inequações no **Maple** usaremos os mesmos comando que usamos na seção anterior.

Exemplo

Soluciona a inequação 3x - 8 > 5.

```
> solve(3·x - 8 > 5, x);
```

$$RealRange\left(Open\left(\frac{13}{3}\right), \infty\right)$$

A resposta é: intervalo real (RealRange) aberto de $\frac{13}{3}$ até infinito, ou seja, $\left]\frac{13}{3}, \infty\right[$. Note que em infinito o intervalo sempre será aberto, por isso o programa não informa se é aberto ou fechado em infinito.Note também que $\frac{13}{3}$ vem em parênteses acompanhado pela palavra *Open,* que nos informa que em $\frac{13}{3}$ o intervalo é aberto.

Para resolvermos equações usando o símbolo “ ≥ ” ou “ ≤ ” escreveremos no **Maple** “ >= ” ou “ <= ” respectivamente.

Exemplo

> $solve(3 \cdot x - 8 \geq 5, x);$

$$RealRange\left(\frac{13}{3}, \infty\right)$$

Repare que a palavra “*Open*” não aparece no $\frac{13}{3}$, logo o intervalo é fechado em $\frac{13}{3}$.

Equações com duas variáveis

Sistemas

Para solucionar o sistema { x + y = 1 e x - y = 4, podemos utilizar a primeira maneira de se resolver, definindo “***solve****({equação1,equação2})*”,sabendo que essas equações já estarão definidas previamente.

Exemplo

> $eqS1 := x + y = 1;$

$$eqS1 := x + y = 1$$

> $eqS2 := x - y = 4;$

$$eqS2 := x - y = 4$$

> $solve(\{eqS1, eqS2\});$

$$\left\{x = \frac{5}{2}, y = -\frac{3}{2}\right\}$$

A segunda maneira de solucionar um sistema { x + y >1 e x - y ≤ 4 é “***solve****({equação1,equação2,{variável1,variável2})*” como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo

> $solve(\{x + y = 1, x - y = 4\}, \{x, y\});$

$$\left\{x = \frac{5}{2}, y = -\frac{3}{2}\right\}$$

Na verdade escrever as variáveis é opcional, o **Maple** resolve mesmo sem esta parte, porém em alguns casos será necessário explicitá-las.

Inequações com 2 variáveis

Nesta seção veremos a resolução de inequações com duas variáveis. Seu processo de solução é idêntico ao de uma variável, assim , escreveremos "***solve***({*inequação1,inequação2*})".

Exemplo

```
> with(plots) : d1 := x + y > 1;
```

$$d1 := 1 < x + y$$

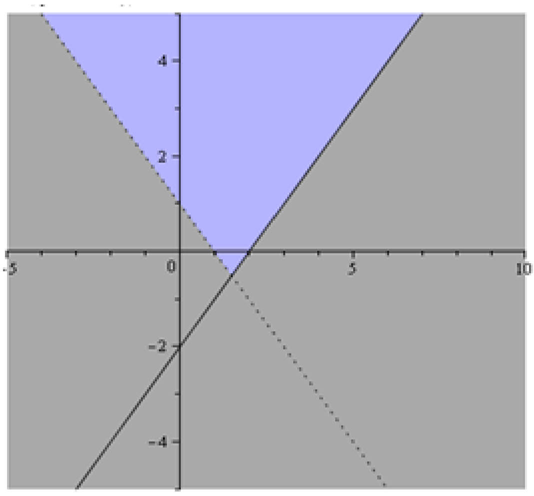
```
> d2 := x - y <= 2;
```

$$d2 := x - y \leq 2$$

```
> solve({d1, d2});
```

$$\left\{x \leq \frac{3}{2}, -x + 1 < y\right\}, \left\{-2 + x \leq y, \frac{3}{2} < x\right\}$$

```
> inequal({d1, d2}, x=-5..10, y=-5..5);
```



Observação:

- O resultado fornecido pelo comando ***solve*** deve ser interpretado como

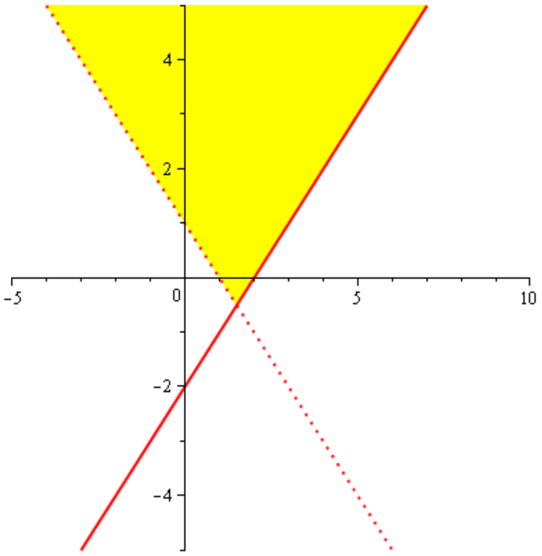
$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \middle| x \leq \tfrac{3}{2} \text{ e } y > -x + 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \middle| x > \tfrac{3}{2} \text{ e } y \geq -2 + x\right\}.$$

Também representamos este resultado graficamente utilizando a estrutura "***inequal***(*{equação1,equação2},x=intervalo,y=intervalo,opções)*" pertencente ao pacote ***plots***. A região lilás do gráfico corresponde aos pontos do plano que satisfazem ao sistema de inequações dado. A reta tracejada, bem como a parte cinza, significa pontos que não são soluções para o sistema .

No próximo exemplo, representamos graficamente a mesma solução vista acima com a modificação de algumas opções padrões.

Exemplo

> *inequal*({*d1*, *d2*}, *x* =−5 ..10, *y* =−5 ..5, *color* = *red*, *thickness* = 2, *optionsexcluded* = (*color* = *white*), *optionsfeasible* = (*color* = *yellow*));



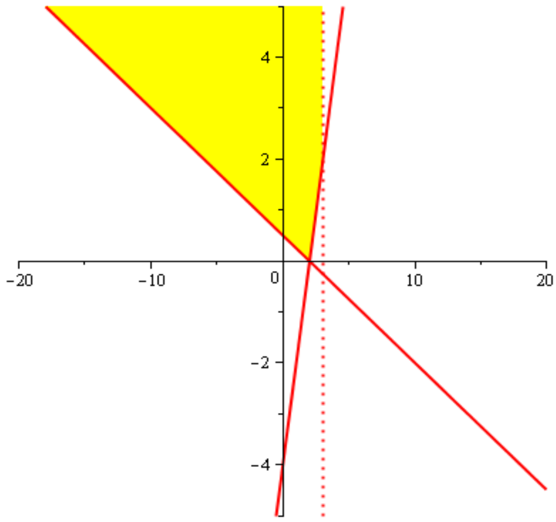
Observação:

A opção ***thickness*** modifica a espessura da linha dos gráficos representados. As opções ***optionsexcluded*** e ***optionsfeasible*** alteram as cores das regiões dos pontos que não satisfazem e satisfazem o sistema de inequação, respectivamente.

Exemplo

Resolva o sistema de inequações $2x - y \leq 4$, $x < 3$ e $x + 4y \geq 2$ graficamente.

> *inequal*({*d3*, *d4*, *d5*}, *x* =−20 ..20, *y* =−5 ..5, *color* = *red*, *thickness* = 2, *optionsexcluded* = (*color* = *white*), *optionsfeasible* = (*color* = *yellow*));



Exemplo

Resolva o sistema de inequações x + 5y > -1 e x + 5y ≤ 3 graficamente.

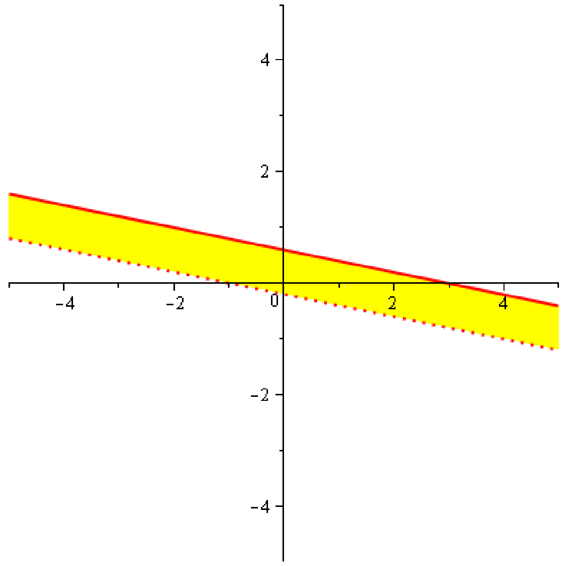
> $i1 := x + 5 \cdot y > -1;$

$$i1 := -1 < x + 5\,y$$

> $i2 := x + 5 \cdot y \leq 3;$

$$i2 := x + 5\,y \leq 3$$

> $inequal(\{i1, i2\}, x = -5..5, y = -5..5, color = red, thickness = 2, optionsexcluded = (color = white), optionsfeasible = (color = yellow));$



Exemplo

Resolva o sistema de inequações x + y ≤ 3, x > -2 e y ≥ -1 graficamente.

> $i3 := x + y \leq 3;$

$$i3 := x + y \leq 3$$

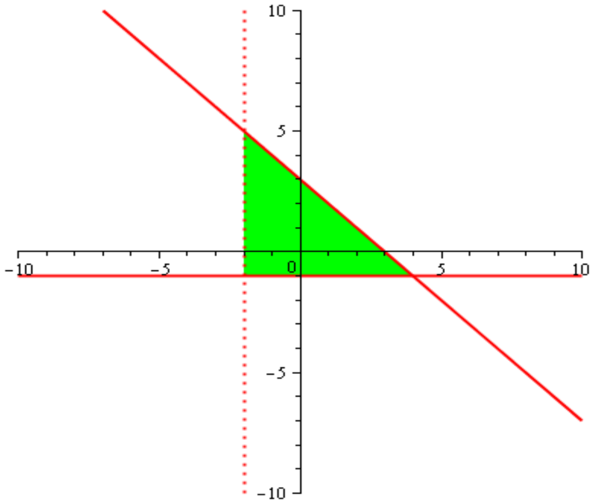
> $i4 := x > -2;$

$$i4 := -2 < x$$

> $i5 := y \geq -1;$

$$i5 := -1 \leq y$$

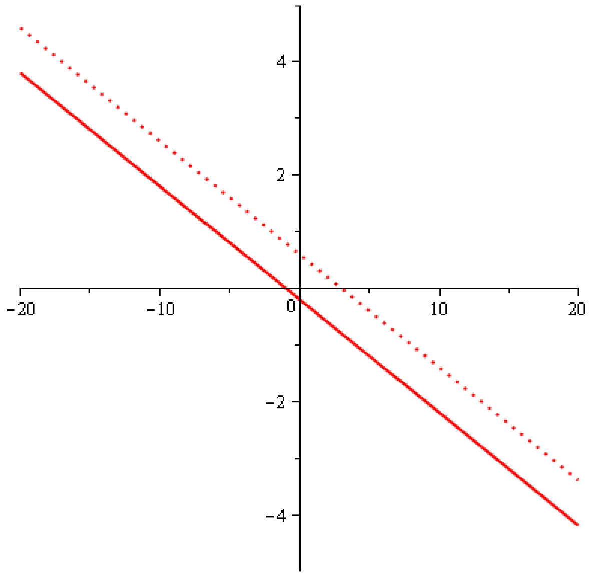
> $inequal(\{i3, i4, i5\}, x = -10..10, y = -10..10, color = red, thickness = 2, optionsexcluded = (color = white), optionsfeasible = (color = green));$



Exemplo

Resolva o sistema de inequações x + 5y > 3 e x + 5y ≤ -1 graficamente.

```
> i6 := x + 5·y > 3;
                              i6 := 3 < x + 5 y
> i7 := x + 5·y ≤ -1;
                              i7 := x + 5 y ≤ -1
> inequal({i6, i7}, x = -20..20, y = -5..5, color = red, thickness = 2, optionsexcluded = (color = white), optionsfeasible
    = (color = red));
```



Observação:

- Neste último exemplo, observe que o conjunto solução do sistema acima é vazio.

Função do 2º grau

A chamada função polinomial do 2º grau ou função quadrática é uma função $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação é generalizadamente da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a,b e c são constantes reais e a≠0. Esta função tem aplicação na descrição da trajetória de um objeto arremessado ao ar livre (um tiro de canhão ou arremesso de uma pedra, por exemplo), no cálculo das dimensões de uma região retangular objetivando obter a maior área possível, dentre outras.

Já sabemos que o gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola e que os seus zeros (valores para os quais f(x)=0) podem ser obtidos pela famosa lei de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Vale relembrar algumas propriedades gráficas desta função:

1) Em relação ao parâmetro a, temos que:

i) se $a > 0$ a função quadrática admite um valor mínimo (concavidade voltada para cima).

ii) se $a < 0$ a função quadrática admite um valor máximo (concavidade voltada para baixo).

2) Em relação ao parâmetro c, temos:

i) a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0 , c)$.

3) Em relação ao discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$), temos:

i) quando $\Delta > 0$ haverá dois pontos de intersecção entre o gráfico da função e o eixo das abscissas (eixo x), que serão as raízes da função ($x_1 \neq x_2$).

ii) quando $\Delta = 0$, a função tem uma raiz real dupla ($x_1 = x_2$) e tangencia o eixo x.

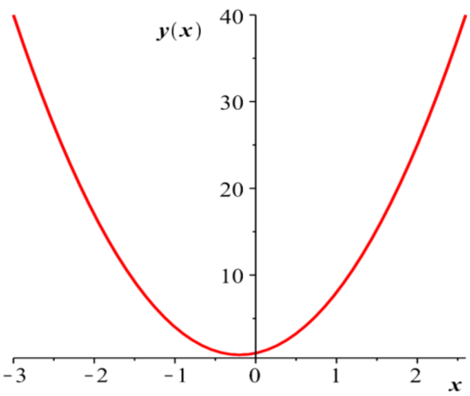
iii) quando $\Delta < 0$ a função não possui raízes reais.

4) Cálculo do vértice.

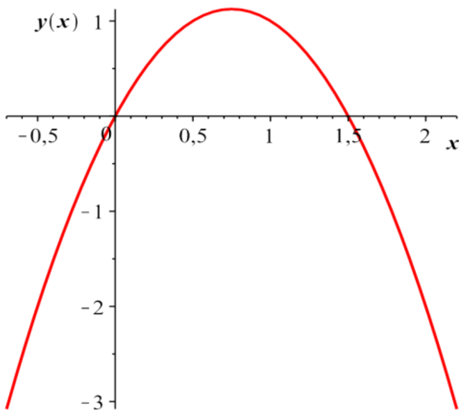
i) o vértice da parábola é o ponto V de coordenadas (x_v , y_v), onde $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.

Exemplo

```
> f := x→a·x^2 + b·x + c :
> a := 5 : b := 2 : c := 1 :
> plot(f(x), x=-3..2.6);
```




```
> a := -2 : b := 3 : c := 0 :
> plot(f(x), x=-0.7..2.2);
```



Outro modo de obtermos as raízes de uma função quadrática consiste em completar quadrado. Carregando o pacote ***student*** (digite *with*(***student***):)podemos utilizar o comando ***"completesquare(****expressão****)"*** para completar o quadrado de uma expressão algébrica.

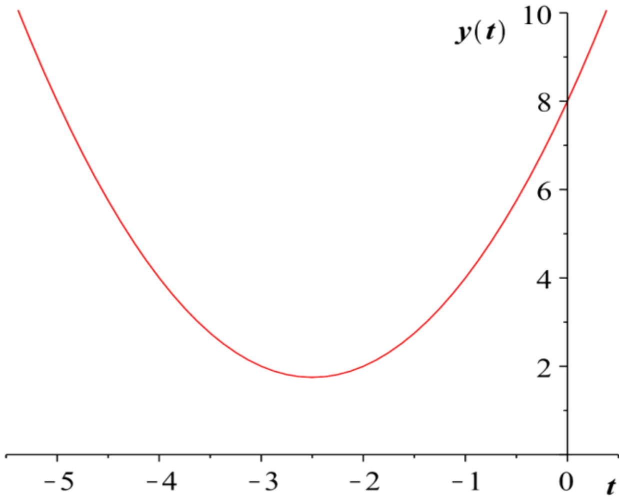
Exemplo

> $with(student):$
> $g := t \rightarrow t^2 + 5\cdot t + 8:$
> $completesquare(g(t));$

$$\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \tag{1}$$

Após completar o quadrado da expressão que representa a função $g(t)$, percebe-se facilmente que ela não admite raízes reais (basta igualar a expressão em azul a zero). Vamos confirmar isto graficamente também.

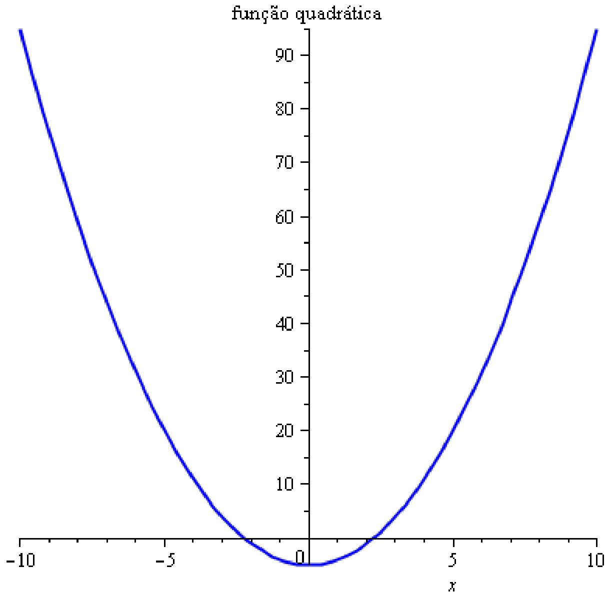
> $plot(g(t), t = -5.5..0.5, y = 0..10);$



Repare que nos casos que não há como completar quadrado, o **Maple** exibe a mesma equação que a anterior.

Exemplo

```
> with(Student[Precalculus]) : g1 := x→x^2 − 5;
                                   g1 := x→x^2 − 5
> CompleteSquare(g1(x));
                                   x^2 − 5
> plot(g1(x), x =−10 ..10, color = blue, thickness = 2, title = "função quadrática");
```



Funções definidas por mais de uma sentença aberta

Funções definidas por mais de uma sentença apresentam diferentes leis de formação em intervalos distintos do domínio, sendo muito comum o seu aparecimento na matemática e em algumas situações do dia-a-dia. Por exemplo, em livrarias online não é difícil encontrar promoções de venda de livros com desconto progressivo, cujo desconto progride da seguinte forma: a partir do terceiro livro comprado ganha-se desconto de 10% sobre o valor total da venda e a partir do quinto ganha-se 20% sobre o mesmo valor. Supondo que estes descontos valem somente para uma determinada categoria, na qual cada livro é vendido a R$20,00 a unidade, o calculo do valor a ser pago pode ser feito da seguinte forma:

$$P(q)=\begin{cases} 20q, & se \quad 0 \leq q < 3 \\ 20q - 0{,}1x20q\,, & se \quad 3 \leq q < 5\,, \\ 20q - 0{,}2x20q\,, & se \quad q \geq 5 \end{cases}$$

em que q é a quantidade de livros comprados.

A função acima é um exemplo de função definida por mais de uma sentença aberta.

A estrutura usada no **Maple** para inserir funções de mais de uma sentença difere da usada para inserir função com apenas uma lei de formação. Usamos o comando ***“f=x →piecewise***(*condição**1***, *sentença**1***, *condição**2***, *sentença**2***, … ,*sentença**n***, *condição**n***)***”*** para inserir uma função definida por n sentenças.

Vamos definir a função h definida por $h(t) = \begin{cases} 2t\,, -1 < t < 3 \\ 2\,,\ t \leq -1 \ ou\ t \geq 3 \end{cases}$.

Exemplo

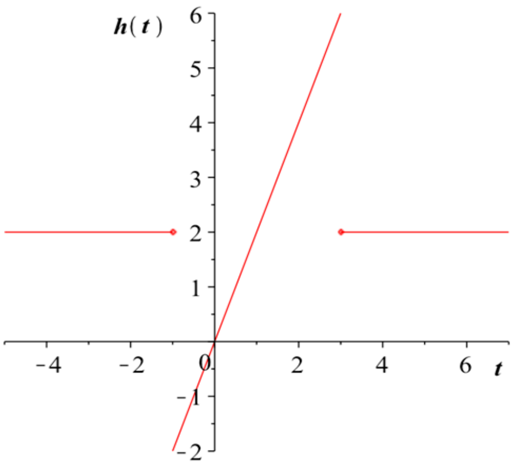
> $h := t \rightarrow piecewise(-1 < t < 3, 2 \cdot t, 2);$

$$h := t \rightarrow piecewise(-1 < t \text{ and } t < 3, 2\,t, 2) \qquad \textbf{(1)}$$

> $h(0); h(20);$

$$0$$
$$2 \qquad \textbf{(2)}$$

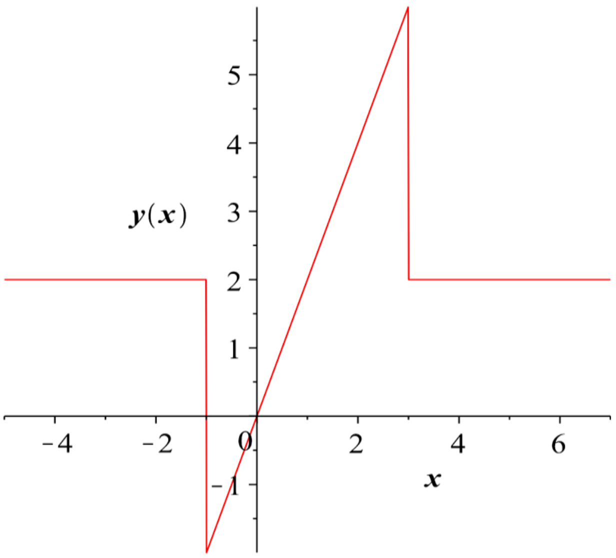
> $plot(h(t), t=-5..7, discont=true);$



Observação:

- No exemplo acima foi usado a opção ***discont***=*true* na estrutura ***plot***. Por padrão está opção está configurada como *false*, mas neste estado as descontinuidades do gráfico da função são ligados por segmentos de retas verticais, por isso mudamos sua configuração para *true*. Veja abaixo o exemplo anterior sem alterar a opção ***discont*** para *true*.

> $plot(h(t), t=-5..7);$



Note também que não foi definido a condição para *h(t)=2*, pois o **Maple** interpretará esta condição como qualquer valor fora do intervalo $]-1,3[$.

Para inserir ≤ (menor ou igual que) no **Maple**, digite < (menor que) e em seguida = (igual).

No exemplo abaixo, escrevemos no **Maple** a função P(q) definida no início desta seção.

Exemplo

> $P := q \rightarrow piecewise(0 \leq q < 3, 20\cdot q, 3 \leq q < 5, 20\cdot q - 0.1\cdot 20\cdot q, q \geq 5, 20\cdot q - 0.2\cdot 20\cdot q);$

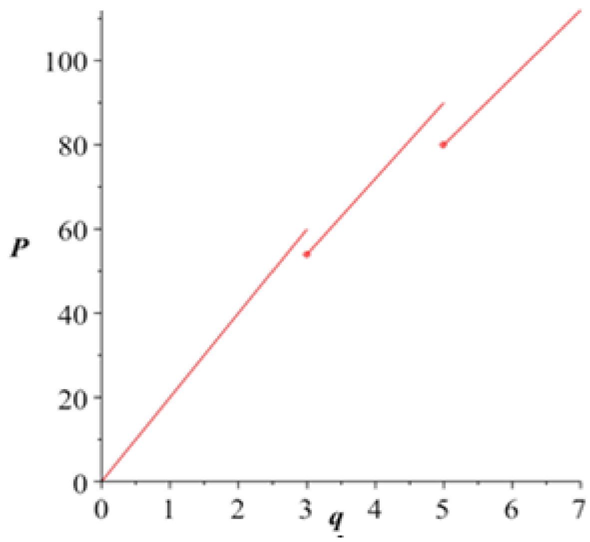
$P := q \rightarrow piecewise(0 \leq q \textbf{ and } q < 3, 20\,q, 3 \leq q \textbf{ and } q < 5, 20\,q + (-1)\cdot 0.1\cdot 20\,q, 5 \leq q, 20\,q + (-1)\cdot 0.2\cdot 20\,q)$ **(1)**

> $P(2); P(3);$

40

54.0 **(2)**

> $plot(P(q), q = 0..7, discont = true);$



O uso dos conectivos *and*(e) e *or* (ou), que equivalem a conjunção e a disjunção, respectivamente, também são úteis no momento de definir alguns intervalos de validade de uma sentença. Vamos definir a função g dada por

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq -4 \; ou \; x > 3 \\ -2x\,, & -4 < x \leq 0 \\ 1\,, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

Exemplo

> $g := x \rightarrow piecewise(x \leq -4 \textbf{ or } x > 3, (x+1)^2, -4 < x \textbf{ and } x \leq 0, -2\cdot x, 1);$

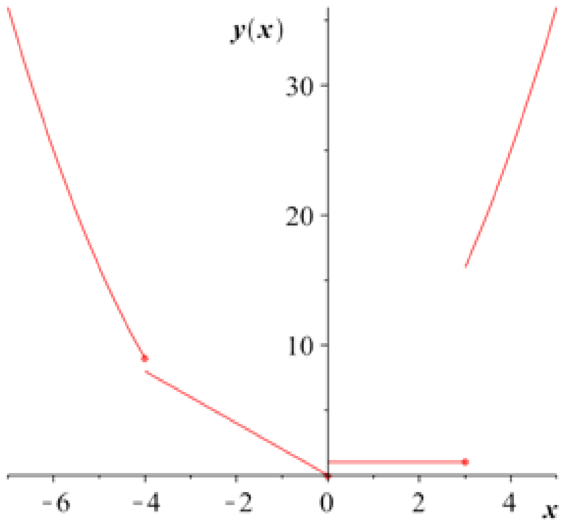
$g := x \rightarrow piecewise(x \leq -4 \textbf{ or } 3 < x, (x+1)^2, -4 < x \textbf{ and } x \leq 0, -2\,x, 1)$ **(1)**

> $g(2); g(-7);$

1

36 **(2)**

> $plot(g(x), x = -7..5, discont = true);$



Função Modular

Módulo

Qual será o valor de $\sqrt{(-5)^2}$? Rapidamente poderíamos fazer:

$$\sqrt{(-5)^2} = [(-5)^2]^{\frac{1}{2}} = (-5)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = -5.$$

Mas pela definição da raiz enésima aritmética este valor deveria ser não negativo, pois $(-5)^2 > 0$, certo? Opa! , então o valor encontrado gera uma contradição. Lembre-se que só podemos aplicar esta propriedade indiscriminadamente quando tivermos $\sqrt{a^2}$ com $a \geq 0$. Então, de maneira geral, temos que $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a\,, & \text{se } a \geq 0 \\ -a\,, & \text{se } a < 0 \end{cases}$.

O que acabamos de fazer com o real a foi encontrar o seu módulo. Representamos por $|a|$ o módulo de a. Assim $\sqrt{a^2} = |a|$ e por definição $|a| = \begin{cases} a\,, & \text{se } a \geq 0 \\ -a\,, & \text{se } a < 0 \end{cases}$.

Calculamos o módulo de um real no **Maple** através do comando ***"abs**(expressão)**"***.

Exemplo

> abs(a);

$$|a| \quad (1)$$

> abs(-5); abs(8);

$$5$$
$$8 \quad (2)$$

Função Modular

Chamamos de função modular ou módulo a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o elemento real $|x|$. Isto que dizer que uma função é modular quando é definida pela lei $f(x) = |x|$.

Também podemos utilizar a definição de módulo e caracterizar a função modular por uma função definida por duas sentenças abertas, a saber:

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -x\,, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Agora vamos definir a função modular no **Maple**. Isto pode ser feito de duas maneiras:

1) Usando o comando "***abs***", que serve para calcular o módulo de um inteiro;
2) Ou usando o comando "***piecewise***" para definir (1).

Exemplo

> $f := x \rightarrow \mathrm{abs}(x);$

$$f := x \rightarrow |x| \qquad \textbf{(1)}$$

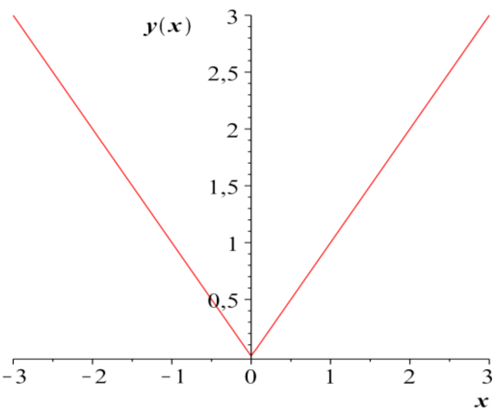
> $g := x \rightarrow piecewise(x \geq 0, x, x < 0, -x);$

$$g := x \rightarrow piecewise(0 \leq x, x, x < 0, -x) \qquad \textbf{(2)}$$

Já com as funções definidas, basta usar o comando "***plot***" para construir os respectivos gráficos.

Exemplo

> $plot(f(x), x = -3..3);$



Equações modulares

Uma das propriedades do módulo dos números reais é a de que $|x|^2 = x^2$, para todo x real. Isso é muito útil para resolver equações modulares, que são aquelas em que a incógnita aparece dentro do módulo. Por exemplo, $|x-1| = 2 \Rightarrow |x-1|^2 = 4 \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow x$=1 ou x=-3.

Recorreremos ao comando ***"solve***(*equação*)***"*** para resolver equações modulares.

Vamos resolver a equação $|x^2 - 2x + 5| + 3 = -|x^2 - 3|$.

Exemplo

> $eq := \mathrm{abs}(x^2 - 2x + 5) + 3 = \mathrm{abs}(x^2 - 3);$

$$eq := |x^2 - 2x + 5| + 3 = |x^2 - 3| \quad \textbf{(1)}$$

> $solve(eq);$

$$\frac{11}{2} \quad \textbf{(2)}$$

Se desejarmos substituir o valor encontrado para x na equação, podemos utilizar a estrutura *"subs*(*variável*=*valor*,*expressão*)*"*.

Exemplo

> $subs\left(x = \frac{11}{2}, eq\right);$

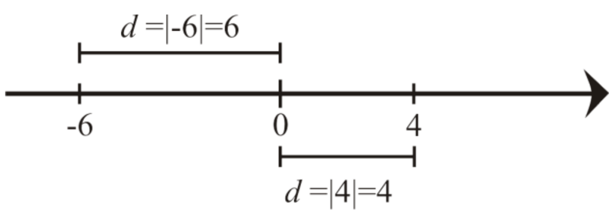
$$\left|\frac{97}{4}\right| + 3 = \left|\frac{109}{4}\right| \quad \textbf{(1)}$$

> $simplify(\%);$

$$\frac{109}{4} = \frac{109}{4} \quad \textbf{(2)}$$

Inequações Modulares

O valor absoluto ou módulo de um número pode ser interpretado geometricamente como a distância desse número até a origem.



Se dissermos que |*x*|<2, estamos falando de reais cuja distância até a origem seja menor do que dois, o que acontece com qualquer real *x* no intervalo]-2,2[, basta pensar na reta real. Agora se fosse ao contrário, se dissermos que |*x*|>2, então estamos falando de reais cuja distância até a origem seja maior do que dois, que é satisfeito por *x* < -2 ou *x* > 2. Daí para qualquer real *k* positivo, podemos generalizar dizendo que:

$$|x| < k \longrightarrow -k < x < k$$
$$|x| > k \longrightarrow x < -k \text{ ou } x > k.$$

As inequações também são resolvidas através do comando "***solve***". Como exemplo, resolveremos a inequação $|x| < 5$.

Exemplo

> $ineq := \text{abs}(x) < 5;$

$$ineq := |x| < 5 \quad \textbf{(1)}$$

> $solve(ineq);$

$$RealRange(Open(-5), Open(5)) \quad \textbf{(2)}$$

A resposta fornecida pelo **Maple** (em azul, na linha **(2)**) quer dizer: *x* está no intervalo real aberto de extremos -5 e 5, isto é, $x \in]-5{,}5[$.

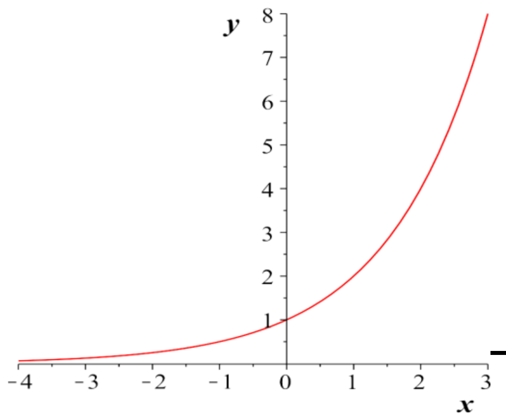
Função Exponencial

Qualquer função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = a^x$ (1), com 0 < a≠1, chama-se função exponencial. Funções exponenciais estão muito ligadas a crescimento de populações e epidemias, por exemplo.

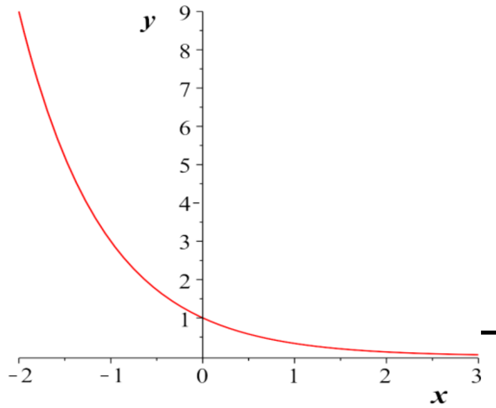
Definir funções exponenciais no **Maple** é bem simples, basta definir uma função da forma (1). Depois basta usar o comando ***"plot"*** para visualizar o gráfico.

Exemplo

> $f := x \rightarrow 2^x :$
> $plot(f(x), x = -4..3);$



> $g := x \rightarrow \frac{1}{3}^x :$
> $plot(g(x), x = -2..3);$



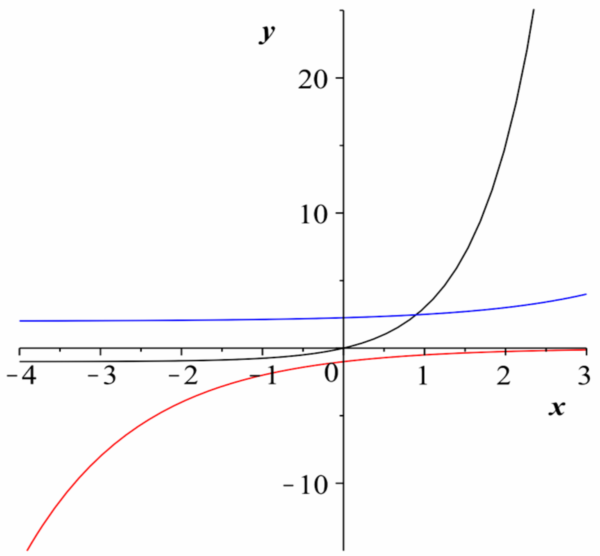
Note que dado a, 0<a≠1, e uma função exponencial $y = a^x$, temos que $y = a^0 = 1$. Isto significa que o gráfico de uma função exponencial sempre passa pelo ponto (0,1), como se pode observar nos gráficos acima. Outro detalhe importante é que a imagem de uma função exponencial é IR+*.

Vamos agora construir gráficos de funções exponenciais transladados ou gráficos de funções exponenciais em composição com outros tipos de funções.

Exemplo

> $f := x \rightarrow 4^x - 1 : g := x \rightarrow 2^{x-2} + 2 : h := x \rightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^x :$

> $plot(\,[\,f(x), g(x), h(x)\,], x = -4..3, y = -15..25, color = [black, blue, red]);$



Observação:

- No exemplo anterior não foi utilizado o comando ***"display"*** para gerar o gráfico das funções no mesmo plano cartesiano, apenas colocamos as funções entre colchetes.
- Sempre que colocamos objetos entre colchetes no **Maple,** a ordem de sucessão dos objetos é levada em consideração. Por isso utilizamos os colchetes no momento em que utilizamos a opção ***"color".*** Isto quer dizer que a cor preta corresponde ao gráfico da função *f*, a cor azul corresponde ao gráfico da função *g* e a vermelha corresponde ao gráfico da função ***h.***

Equações exponenciais

Equações exponenciais são aquelas que apresentam ao menos uma potência com incógnita no expoente. Quase sempre é possível resolver uma equação exponencial reduzindo ambos os membros da igualdade a potências de mesma base, e daí usar o fato de que:

$$a^x = a^y \longrightarrow x = y$$

Mas em alguns casos a única saída é utilizar logaritmos.

Exemplo

> $eq1 := 2^{3\cdot x-1}\cdot 4^{2\cdot x+3} = 8^{x-3};$

$$eq := 2^{3x-1}\,4^{2x+3} = 8^{x-3} \quad \textbf{(1)}$$

> $solve(eq1, \{x\});$

$$\left\{x = -\frac{7}{2}\right\} \quad \textbf{(2)}$$

> $eq2 := \mathrm{surd}\left(2^{3\cdot x-8}, x+4\right) = 2^{x-5};$

$$eq2 := \mathrm{surd}\left(2^{3x-8}, x+4\right) = 2^{x-5} \quad \textbf{(3)}$$

> $solve(eq2, [x]);$

$$[[x = -2], [x = 6]] \quad \textbf{(4)}$$

Inequações exponenciais

Toda inequação que apresenta pelo menos uma potência com incógnita no expoente é chamada de inequação exponencial.

Antes de prosseguirmos, vamos retroceder aos gráficos do início da seção. Observando os gráficos das funções exponenciais construídos, notamos uma propriedade muito importante, a qual será usada para resolver as inequações, que é:

i) Se $a > 1$ e $a^x > a^y$ então $x > y$;
ii) Se $0 < a < 1$ e $a^x > a^y$ então $x < y$.

Volte lá no início da seção e observe os gráficos, não é isto o que acontece?

Daí, usando um raciocínio análogo ao que foi utilizado para resolver equações exponenciais, o objetivo ao resolver inequações exponenciais será reduzir ambos os membros da inequação a potências de mesma base e usar a propriedade anterior. Claro, quando possível.

Exemplo

> $ineq1 := 3^{2 \cdot x+3} > 243;$

$$ineq1 := 243 < 3^{2x+3} \quad (1)$$

> $solve(ineq1);$

$$RealRange(Open(1), \infty) \quad (2)$$

> $ineq2 := \left(27^{x-2}\right)^{x+1} \geq \left(9^{x+1}\right)^{x-3};$

$$ineq2 := \left(9^{x+1}\right)^{x-3} \leq \left(27^{x-2}\right)^{x+1} \quad (3)$$

> $solve(ineq2);$

$$RealRange(-\infty, -1), RealRange(0, \infty) \quad (4)$$

O conjunto solução da *eq1* é $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ e o da *eq2* é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \; ou \; x \geq 0\}$.

Funções Logarítmicas

Função logarítmica é toda função $f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x) = \log_a x$, com $0 < a \neq 1$. Deixando só como lembrete que $\log_a c = b$ (lê-se: logaritmo de c na base a) se, e somente se,$a^b = c$. Portanto logaritmo é um expoente, e isto é o que queremos encontrar quando estamos calculando o logaritmo de um número c na base a, o expoente que elevado ao a obtém-se o c, que nesse caso consideramos como sendo b. Com isso, convém observar que na função exponencial temos representado no eixo x o expoente e no eixo y a potência. Já na função logarítmica ocorre o inverso, temos representado no eixo x a potência e no eixo y o expoente. Então

$$f(m) = a^m \quad \text{e} \quad g(n) = \log_a n$$

são na verdade funções inversas, isto é, $g(n) = f^{-1}(m)$, posto que $f(m) = n$ e $g(n) = m$. Vamos construir os gráficos de f e g no mesmo plano e ver o que acontece.

Exemplo

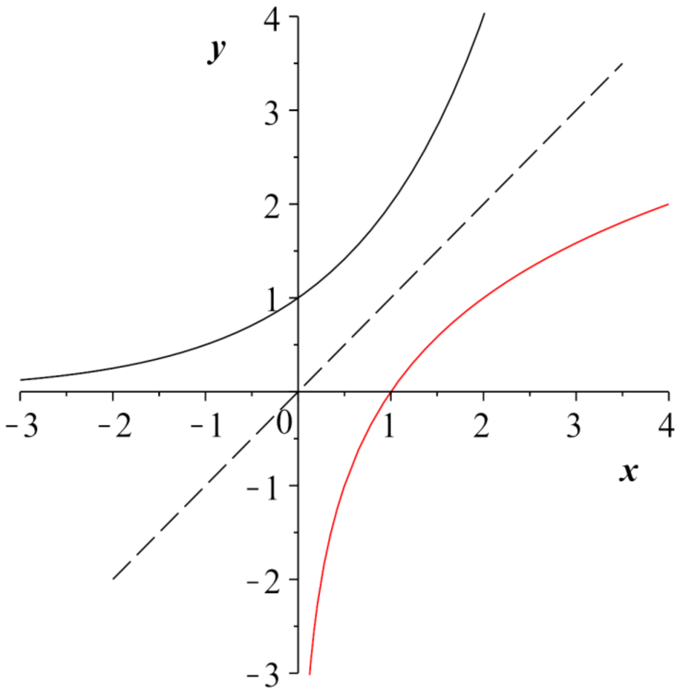
> $f := x \rightarrow 2^x;$

$$f := x \rightarrow 2^x \tag{1}$$

> $h := x \rightarrow \log[2](x);$

$$h := x \rightarrow \log_2(x) \tag{2}$$

> $plot([f(x), h(x)], x = -3..4, y = -3..4, color = [black, red]);$



Abaixo segue mais alguns exemplos de funções logarítmicas ou exemplos de funções reais que foram obtidas da função logarítmica por translação ou por composição com outros tipos de funções.

Exemplo

> $f := x \rightarrow \log\left[\frac{1}{2}\right](x-2);$

$$f := x \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \qquad (1)$$

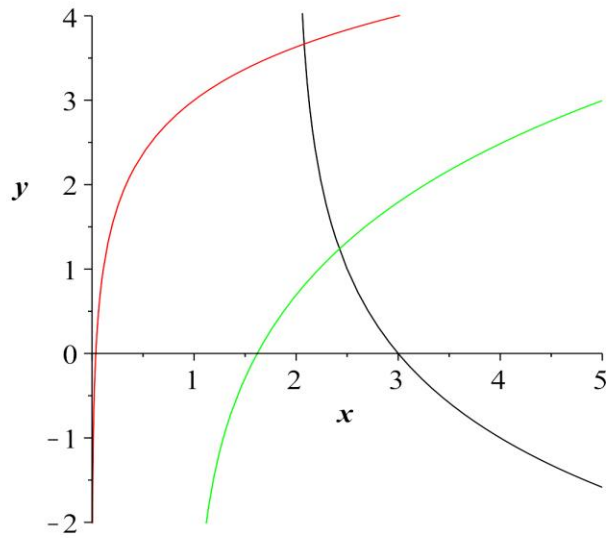
> $g := x \rightarrow \log[3](x) + 3;$

$$g := x \rightarrow \log_3(x) + 3 \qquad (2)$$

> $h := x \rightarrow \log(x-1) + \log(x);$

$$h := x \rightarrow \log(x-1) + \log(x) \qquad (3)$$

> $plot([f(x), g(x), h(x)], x = 0..5, y = -2..4, color = [black, red, green]);$



Equações Logarítmicas

Equações nas quais a incógnita está presente no logaritmando ou na base de um logaritmo são chamadas de equações logarítmicas.

Resolvemos este tipo de equação reduzindo-a a uma igualdade entre logaritmos (ou entre um logaritmo e um número real), utilizando mudança de base ou por meio de uma mudança de incógnita(a velha frase: “chamando de *y* tal expressão...”).

Exemplo

$$> eq1 := (\log[x](5\cdot x-6))^2 - 3\cdot\log[x](5\cdot x-6) + 2 = 0;$$

$$eq1 := \frac{\ln(5x-6)^2}{\ln(x)^2} - \frac{3\ln(5x-6)}{\ln(x)} + 2 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$> solve(eq1, \{x\});$$

$$\{x=2\}, \{x=3\}, \left\{x=\frac{3}{2}\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

$$> eq2 := \log\left[\frac{1}{3}\right](3\cdot x^2 - 4\cdot x - 17) = \log\left[\frac{1}{3}\right](2\cdot x^2 - 5\cdot x + 3);$$

$$eq2 := -\frac{\ln(3x^2-4x-17)}{\ln(3)} = -\frac{\ln(2x^2-5x+3)}{\ln(3)} \qquad \textbf{(3)}$$

$$> solve(eq2, \{x\});$$

$$\{x=4\}, \{x=-5\} \qquad \textbf{(4)}$$

Observação:

- Veja que nos resultados mostrados pelo **Maple**, parte azul, foi feita a mudança de base automaticamente, permutando ambos os logaritmos para a base ***e***.

Inequações Logarítmicas

A definição de inequação logarítmica é semelhante à de equação logarítmica, a diferença reside no fato de que as expressões são “separadas” por desigualdades.

Lembra-se que em equações exponenciais, observamos que se a base a de uma função exponencial $f(x) = a^x$ fosse maior do que 1, a função f seria crescente (daí $a^x > a^x \Rightarrow x > y$), e que se $0 < a < 1$, teríamos a função f decrescente (consequentemente $a^x > a^x \Rightarrow x > y$). Pois bem, com a função logarítmica é a mesma coisa (Volte ao início da sessão e verifique se não é a mais pura verdade). Logo, o principal método para resolver inequações logarítmicas consiste, mormente, em reduzir os membros da desigualdade a logaritmos de mesma base e usar propriedade análoga a que deduzimos em inequações exponenciais, diferindo apenas no fato de que temos que impor que a base a seja positiva e distinta de 1.

Exemplo

> $ineq1 := \log\left[\frac{1}{3}\right]\left(\log\left[\frac{1}{4}\right](x^2-5)\right) > 0;$

$$ineq1 := 0 < -\frac{\ln\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\ln(x^2-5)}{\ln(2)}\right)}{\ln(3)} \qquad (1)$$

> $solve(ineq1);$

$$RealRange\left(Open(-\sqrt{6}), Open\left(-\frac{1}{2}\sqrt{21}\right)\right), RealRange\left(Open\left(\frac{1}{2}\sqrt{21}\right), Open(\sqrt{6})\right) \qquad (2)$$

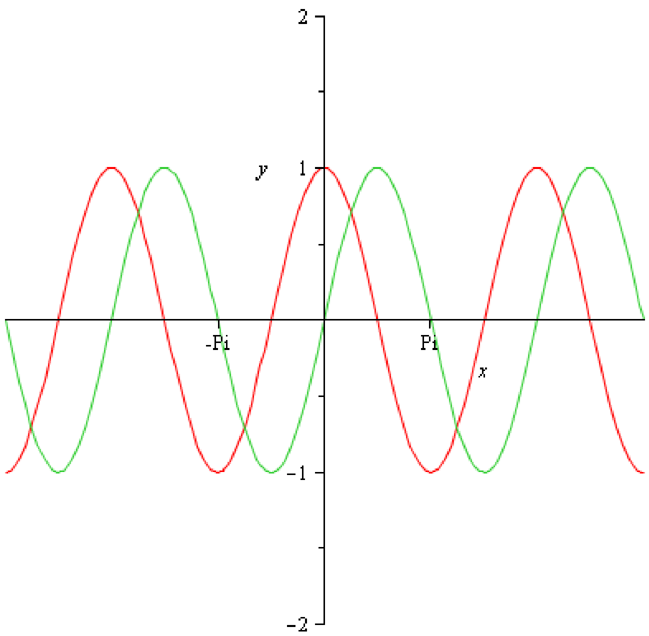
Funções trigonométricas

Funções circulares ou trigonométricas são aquelas cuja lei de formação é uma das razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente, secante, etc) ou translações destas razões. Estes tipos de funções são periódicas, isto é, existe um número p>0 tal que f(x+p)=f(x), para todo x no domínio de f. A função seno, por exemplo, tem período 2π, pois sen(x)=sen(x+2kπ) para todo x, onde k inteiro. A função cosseno também tem período 2π e a função tangente tem período π.

A seguir vamos construir o gráfico destas funções no **Maple**.

Gráfico da função seno e cosseno

> plot({cos(x), sin(x)}, x =−3 · Pi ..3 · Pi, y =−2 ..2, tickmarks = [[3.14 = "Pi", −3.14 = "-Pi"], default]);



Repare que podemos fazer com que o programa marque no gráfico pontos específicos que desejamos, como no exemplo acima. Para isso utilizaremos como opção o comando *"**tickmarks**[[ponto que deseja marcar],default]"*.

Gráfico da função tangente

> $plot(\tan(x), x=-10..10, y=-5..5, color=black, thickness=2, discont=true);$

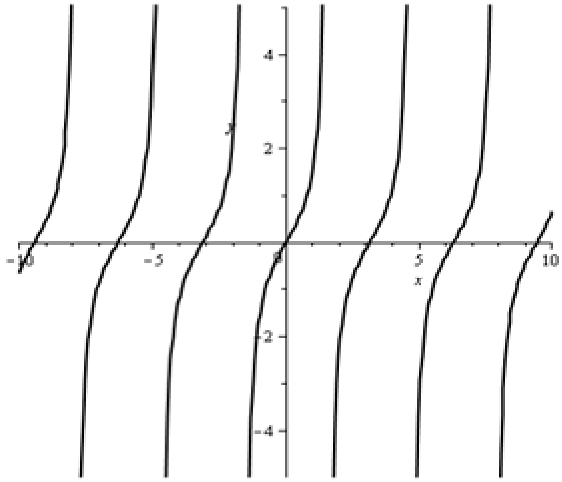


Gráfico da função cotangente

> $plot(\cot(x), x=-10..10, y=-3..3, color=red, thickness=2, discont=true);$

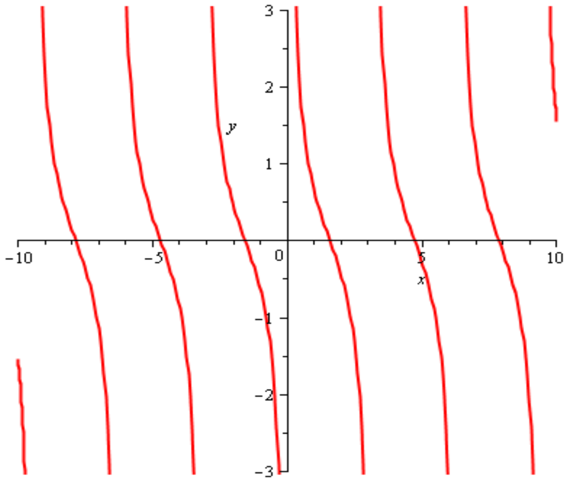


Gráfico da função secante

```
> plot(sec(x), x =-10 ..10, y =-5 ..5, color = green, thickness = 2, discont = true);
```

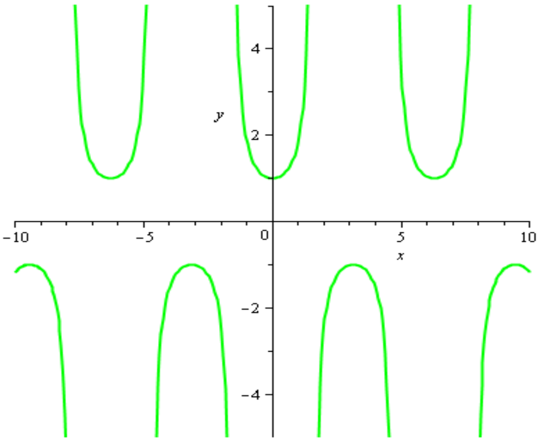


Gráfico da função cossecante

```
> plot(csc(x), x =-10 ..10, y =-5 ..5, color = orange, thickness = 2, discont = true);
```

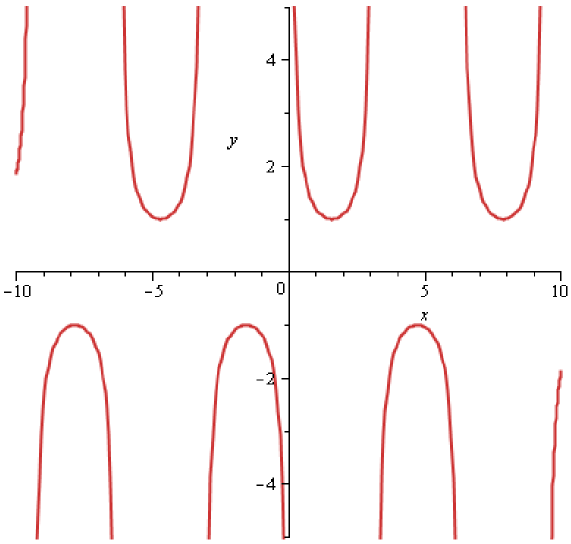


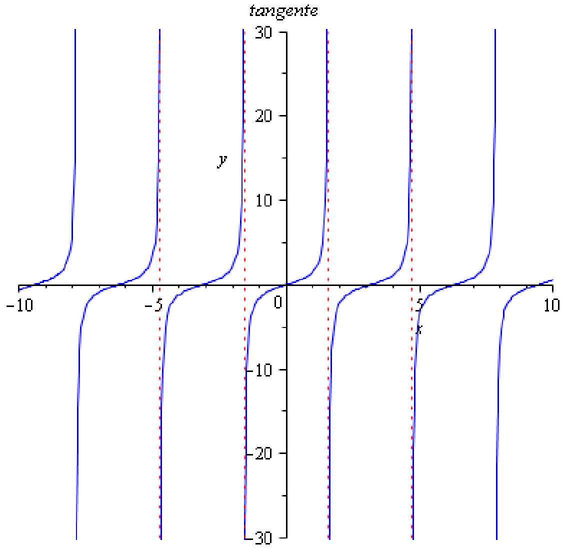
Gráfico de funções com assíntotas

Dizemos que uma reta é uma assíntota de uma curva quando um ponto ao mover-se ao longo da parte extrema da curva, se aproxima dessa reta.Em outras palavras, para valores muito grandes da variável, as assíntotas são as retas que determinam os valores máximos que a curva poderá alcançar, lembrando que esses valores nunca são alcançados realmente.

Abaixo veremos o exemplo do gráfico da tangente, só que agora mostrando também suas assíntotas. Usaremos ainda o pacote *“**with**(plots)”*, para construir o gráfico da tangente, usaremos o mesmo comando *“**plot**(função(variável),intervalo,opções)”*. Depois construiremos o gráfico só das assíntotas, usando o comando “***implicitplot***({assíntotas},intervalo,opções)”.E por último, usaremos o comando “***display***(gráfico1,gráfico2)” para podermos visualizar os dois gráficos num mesmo plano cartesiano.

Exemplo

```
> c1 := plot(tan(x), x=-10..10, y=-30..30, color=blue, discont=true, title='tangente'):
> c2 := implicitplot({x=Pi/2, x=-Pi/2, x=3*Pi/2, x=-3*Pi/2}, x=-10..10, y=-30..30, linestyle=2, color=red):
> display(c1, c2);
```



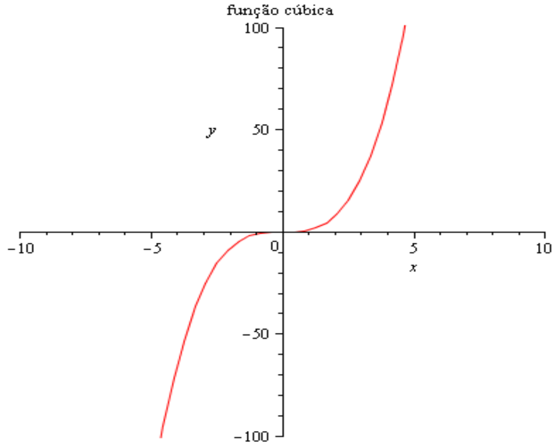
Função cúbica

Uma função do tipo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a > 0$ é uma função polinomial chamada função cúbica.

O gráfico de uma função cúbica é uma curva que pode apresentar pontos de máximos e mínimos. O domínio e a imagem é sempre o conjunto dos números reais. Os valores para os quais $f(x) = 0$, recebem o nome de zeros da função cúbica. Uma função de grau 3, tem exatamente 3 raízes reais ou complexas, (com no mínimo uma raiz real), desde que cada raiz seja contada de acordo com sua multiplicidade. O termo independente determina a interseção com o eixo y.

Exemplo

```
> f5 := x→x^3;
                                   f5 := x→x^3
> plot(f5(x), x=-10..10, y=-100..100, title = "função cúbica");
```



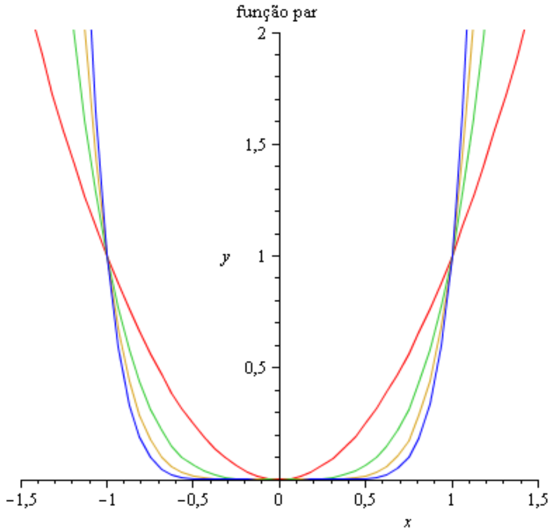
Funções pares e ímpares

Função par

Será uma função par a relação em que elementos simétricos do domínio tiverem a mesma imagem no conjunto de chegada. Ou seja, uma função será par se $f(x) = f(-x)$.

Exemplo

```
> plot({x^2, x^4, x^6, x^8}, x=-1.5..1.5, y=0..2, title = "função par");
```

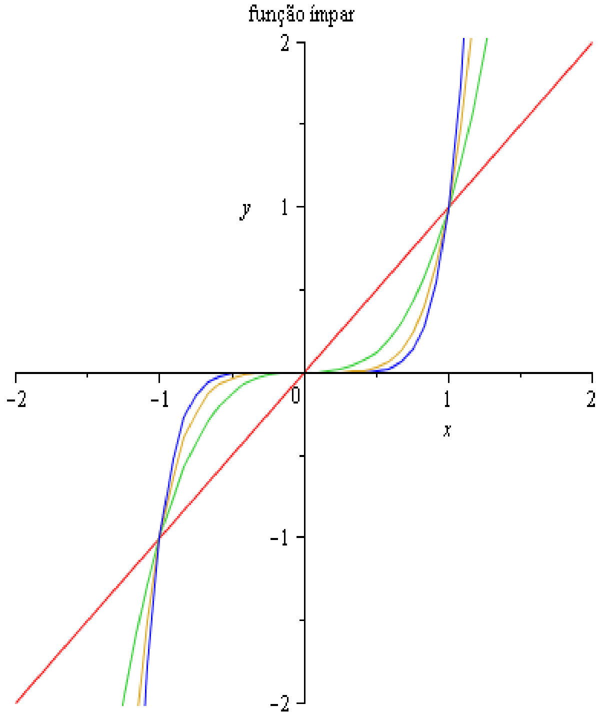


Função ímpar

Será uma função ímpar a relação em que os elementos simétricos do conjunto do domínio tiverem imagens simétricas no conjunto de chegada. Ou seja, uma função será ímpar se $f(x) = -f(-x)$.

Exemplo

> plot({x, x^3, x^5, x^7}, x=-2..2, y=-2..2, title="função ímpar");



Função Composta

Chama-se função composta (ou função de função) à função obtida substituindo-se a variável independente x por outra função. Para indicar a composição de duas funções, escrevemos: fog(x)(lê-se: f composta com g ou f bola g) para representar f(g(x)) ou gof(x) para representar g(f(x)).

Atente para dois fatos:

1º) Em geral, fog(x) $\neq$ gof(x)(a operação " composição de funções " não é comutativa).

2º) A operação fog(x) só é possível se CD(g) = D(f).

No **Maple** usamos a estrutura "*f*@g" para fazer a composição de funções, onde f e g são funções quaisquer. No exemplo abaixo, fizemos a composição entre as funções $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $g\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definidas por $f(x) = \sqrt{x} + 5$ e $g(x) = 2^{x-5} + \ln x$, respectivamente.

Exemplo

> $f := x \to \mathrm{sqrt}(x) + 5;$

$$f := x \to \sqrt{x} + 5 \quad (1)$$

> $g := x \to 2^{x-5} + \ln(x);$

$$g := x \to 2^{x-5} + \ln(x) \quad (2)$$

> $h := f@g;$ # **Definimos a função h dada por h(x) = (f∘g)(x).**

$$h := f@g \quad (3)$$

> $h(1); h(11);$

$$\frac{21}{4}$$

$$\sqrt{64 + \ln(11)} + 5 \quad (4)$$

> $h(0);$ # **Ocorre este erro pois 0(zero) não pertence ao domínio de g**

Error, (in ln) numeric exception: division by zero

Para se fazer a composição de uma função f com ela mesma, repetidas vezes, usamos a estrutura "f@@n", onde n é um inteiro positivo tal que f@@1=f, f@@2=fof, f@@3=fo(fof) , ...

Exemplo

> $f := x \to \mathrm{sqrt}(x) + 5;$

$$f := x \to \sqrt{x} + 5 \quad (1)$$

> $(f@@1)(x);$

$$\sqrt{x} + 5 \quad (2)$$

> $(f@@2)(x);$

$$\sqrt{\sqrt{x} + 5} + 5 \quad (3)$$

> $(f@@5)(x);$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x} + 5} + 5} + 5} + 5} + 5 \quad (4)$$

<u>Observação:</u>

No exemplo acima escrevemos $(f@@n)(x)$ ao invés de $f@@n$. A diferença reside no fato de que $(f@@n)(x)$ nos forneça a lei de formação da composta, enquanto $f@@n$ define a função composta. Isto quer dizer que se escrevermos [> *h:=(f@@2)(x)*, no momento em que pedirmos *h*(*3*) nenhum resultado será apresentado, pois (*f@@2*)(*x*) é interpretada pelo **Maple** como apenas uma expressão e não como a definição da função *h*.

Função Inversa

Antes de falarmos de funções inversas, devemos nos relembrar de três classes de função, as quais são: função sobrejetora, função injetora e função bijetora, pois saber identificar se uma função qualquer se encaixa na última destas três classes, permite determinar se a mesma admite ou não inversa.

Função sobrejetora: É uma função $f: A \to B$ onde para cada $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Em outras palavras uma função é sobrejetora quando a sua imagem é igual ao seu contradomínio. Pensando em f representada por diagramas, significa que todo elemento de B recebe uma "flecha" partindo de A.

Como exemplos de funções sobrejetoras temos:

$a)\ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x$

$b)\ g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$; $x \longmapsto x^2$

$c)\ h: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$; $x \longmapsto \frac{x^2+5}{x}$

Função injetora: Uma função é injetora se, e somente se, os elementos distintos do seu domínio possuem imagens distintas. Isto é, $x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ou, de forma equivalente, $f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$.

Exemplos de funções injetoras são:

$a)\ f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$

$b)\ g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

$c)\ h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x^3$

Função bijetora: Uma função é dita bijetora, quando é ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora. Note que as funções sobrejetoras a) e c) são também injetoras e que a função injetora c) é sobrejetora, portanto são bijetoras.

Se f é uma função bijetora de A em B, a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos função inversa de f e indicamos por f^{-1}. Ou seja $f(x) = y \longrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Vejamos algumas observações importantes sobre funções inversas:

a) para se obter a função inversa, basta trocar as variáveis x e y e isolar a variável y.

b) o domínio de f^{-1}é igual ao conjunto imagem de f.

c) o conjunto imagem de f^{-1}é igual ao domínio de f.

d) os gráficos de f e de f^{-1}são curvas simétricas em relação à reta $y = x$, ou seja, à bissetriz do primeiro e do terceiro quadrante.

e) $f\big(f^{-1}(x)\big) = f^{-1}\big(f(x)\big)$.

Como foi previamente mencionado, funções inversas precisam ser bijetoras, pois se assim não fosse, a inversa feriria a definição de função. Considere a função injetora supracitada a); sabemos que ela não é sobrejetiva, pois $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R} = \mathrm{CD}(f)$. Daí, $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é definida por $f^{-1}(x) = x^2$. Porém, neste caso, para $x \in \mathbb{R}_-$ não temos imagem, pois , pela observação b e c, estes pontos não fazem parte da imagem de f e consequentemente não fazem parte do domínio de f^{-1}, indo contra a definição de função, pois estes pontos não possuem imagem.

As funções pré-definidas no Maple, como seno e cosseno, por exemplo, possuem inversas que podem ser obtidas pela estrutura "*f*@@(-1)".

Exemplo

```
> (sin@@(-1))(x);
                              arcsin(x)                              (1)
> (exp@@(-1))(x);
                                ln(x)                                (2)
> (tan@@(-1))(x);
                              arctan(x)                              (3)
```

Agora, para uma função qualquer, vamos usar o raciocínio da observação a) acima no **Maple**. Para isso, utilizaremos a função f definida por $f(x) = 2x + 3$.

Exemplo

```
> f := x→2·x + 3;
                        f := x→2 x + 3                               (1)
> passo1 := y = f(x);
                        passo1 := y = 2 x + 3                        (2)
> passo2 := solve(eq1, x);# Isolamos a variável x.
                        passo2 := 1/2 y − 3/2                        (3)
> passo3 := subs(y = x, passo2);# Trocamos y por x.
                        passo3 := 1/2 x − 3/2                        (4)
> g := unapply(passo3, x);# Definimos a função g, que é a inversa de f.
                        g := x→ 1/2 x − 3/2                          (5)
> f(1); g(5);
                                5
                                1                                    (6)
```

Polinômios

Dados números complexos a_n, a_{n-1}, ... , a_2, a_1, a_0 e um natural n, a função $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_2 x_2 + a_1 x_1 + a_0$$

é o que chamamos de função polinomial ou polinômio na variável x. Os a_i são os coeficientes do polinômio, com i = 0...n, e o a_n é chamado de coeficiente dominante. O natural n é chamado de grau do polinômio.

O **Maple** usa o pacote "***PolynomialTools"*** para realizar algumas operações com polinômios. Então vamos "chamá-lo" antes de inserirmos comandos digitando "***with***(*PolynomialTools*)":

```
> with(PolynomialTools);
[CoefficientList, CoefficientVector, FromCoefficientList, FromCoefficientVector, GcdFreeBasis,
    GreatestFactorialFactorization, Hurwitz, IsSelfReciprocal, MinimalPolynomial, PDEToPolynomial,
    PolynomialToPDE, ShiftEquivalent, ShiftlessDecomposition, Shorten, Shorter, Sort, Split, Splits, Translate]
```

Vamos definir alguns polinômios no **Maple**:

Exemplo

```
> P := sum(a[k]·x^k, k = 0..6);
```

$$P := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$$

No exemplo acima, P é um polinômio de coeficientes genéricos de grau 6

Exemplo

```
> Q := sum(b[k]·x^k, k = 0..5);
```

$$Q := b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5$$

No exemplo precedente, Q é um polinômio de coeficientes genéricos de grau 5

Agora definiremos um polinômio de grau 2 com coeficientes não genéricos.

Exemplo

```
> p := 3·x^2 + 5·x − 5;
```

$$p := 3 x^2 + 5 x - 5$$

O grau e coeficiente dominante de um polinômio são determinados utilizando-se os comandos "***degree***(*polinômio*, *variável*)" e "***lcoeff***(*polinômio*, *variável*)", respectivamente. Veja abaixo.

Exemplo

> *lcoeff*(P, x);

$$a_6$$

> *degree*(P, x);

$$6$$

> *lcoeff*(p, x);

$$3$$

> *degree*(p, x);

$$2$$

Também podemos obter uma lista com os coeficientes de um polinômio em ordem crescente através do comando "***CoefficientList***(*polinômio*, *variável*)".

Exemplo

> *CoefficientList*(P, x);

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$$

> *CoefficientList*(p, x);

$$[-5, 5, 3]$$

Atente para o fato de que são polinômios na variável x apenas as funções definidas da forma (1), dada no início da seção. Com isso funções definidas por g(x) = $\frac{x_1}{2}$+2 ou h(x) = 5x-3+x2 não são funções polinomiais. O comando "***type*** (*expressão*, *polynom*)" verifica se uma função dada é polinomial, retornando com *true*, caso seja verdadeiro, ou *false*, caso seja falso.

Exemplo

> *type*$\left(x^{\frac{1}{2}} + 2, \mathit{polynom}\right)$;

$$\mathit{false}$$

> *type*$\left(x^3 + 5 \cdot x - 3, \mathit{polynom}\right)$;

$$\mathit{true}$$

Igualdade de Polinômios

Quando dois polinômios *f* e *r* têm todos os seus coeficientes ordenadamente iguais, dizemos que esses dois polinômios são idênticos. Representamos este fato escrevendo f(x)=r(x).

Por exemplo, se $f(x)=x^2+2x-1$ e $r(x)=x^2-(-2)x+2-3$ podemos dizer que *f* e *r* são idênticos, pois os coeficientes de *f* são: $a_2=1$, $a_1=2$, $a_0=-1$ e os de *r* são: $a_2=1$, $a_1= -(-2) =2$, $a_0= 2-$

3 = -1, isto é, eles têm ordenadamente os mesmos coeficientes. Escrevemos também g(x)=0 para indicar o polinômio nulo, que é aquele que têm todos os seus coeficientes iguais a zero. Com o auxílio do comando "***evalb***" pode-se utilizar o **Maple** para verificar a identidade entre polinômios.

Exemplo

> $evalb(3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 12 = 15 \cdot x^4 - 1);$

$$false$$

> $evalb(x^3 + 0 \cdot x + 1 = x^3 + 1);$

$$true$$

Operações com polinômios

O Maple tem comandos específicos para colecionar termos (fatorar), expandir termos entre outros, vejamos alguns deles:

Soma e Subtração

A soma e subtração são feitas somando-se e subtraindo-se, respectivamente, os coeficientes dos termos semelhantes. Podemos visualizar estas operações no **Maple**. Para isto vamos utilizar os polinômios P e Q definidos anteriormente e efetuar a soma e a subtração entre eles.

Exemplo

> $soma := P + Q;$

$$soma := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5$$

> $subtração := P - Q;$

$$subtração := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 - b_0 - b_1 x - b_2 x^2 - b_3 x^3 - b_4 x^4 - b_5 x^5$$

Note que o **Maple** não agrupa os termos semelhantes. Para isto usamos o comando "***collect***(*polinômio*, *variável*)".

Exemplo

> $collect(soma, x);$

$$a_6 x^6 + (a_5 + b_5) x^5 + (a_4 + b_4) x^4 + (b_3 + a_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0$$

Multiplicação

O produto entre dois polinômios é feito aplicando-se a propriedade distributiva da soma em relação à multiplicação.

Para realizar o produto entre dois polinômios usamos o conhecido " * ".

Exemplo

```
> produto := P*Q;
```

$$produto := \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5\right)$$

Veja que a distributiva não foi efetuada. Então abriremos mão do comando "***expand***(*expressão*)" para que a distributiva seja aplicada.

Exemplo

```
> expand(%);
```

$$a_5 x^5 b_0 + a_2 x^3 b_1 + a_3 x^5 b_2 + a_3 x^8 b_5 + a_1 x^4 b_3 + a_5 x^6 b_1 + a_3 x^4 b_1 + a_0 b_1 x + a_6 x^9 b_3 + a_6 x^8 b_2$$
$$+ a_4 x^9 b_5 + a_0 b_2 x^2 + a_5 x^9 b_4 + a_2 x^2 b_0 + a_4 x^6 b_2 + a_5 x^7 b_2 + a_6 x^7 b_1 + a_6 x^{10} b_4 + a_1 x^2 b_1 + a_3 x^6 b_3$$
$$+ a_2 x^4 b_2 + a_0 b_4 x^4 + a_4 x^7 b_3 + a_4 x^5 b_1 + a_5 x^8 b_3 + a_2 x^6 b_4 + a_1 x^3 b_2 + a_2 x^5 b_3 + a_4 x^8 b_4 + a_6 x^6 b_0$$
$$+ a_0 b_5 x^5 + a_2 x^7 b_5 + a_3 x^3 b_0 + a_4 x^4 b_0 + a_6 x^{11} b_5 + a_3 x^7 b_4 + a_1 x^6 b_5 + a_1 x b_0 + a_5 x^{10} b_5 + a_0 b_3 x^3$$
$$+ a_1 x^5 b_4 + a_0 b_0$$

Observe mais uma vez que há termos semelhantes a serem agrupados, sendo assim usaremos o comando "***collect***" novamente.

Exemplo

```
> collect(%, x);
```

$$a_6 x^{11} b_5 + \left(a_6 b_4 + a_5 b_5\right) x^{10} + \left(a_6 b_3 + a_4 b_5 + a_5 b_4\right) x^9 + \left(a_3 b_5 + a_5 b_3 + a_4 b_4 + a_6 b_2\right) x^8 + \left(a_4 b_3\right.$$
$$\left.+ a_3 b_4 + a_6 b_1 + a_2 b_5 + a_5 b_2\right) x^7 + \left(a_2 b_4 + a_5 b_1 + a_3 b_3 + a_6 b_0 + a_4 b_2 + a_1 b_5\right) x^6 + \left(a_4 b_1 + a_3 b_2\right.$$
$$\left.+ a_0 b_5 + a_2 b_3 + a_1 b_4 + a_5 b_0\right) x^5 + \left(a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_0 b_4 + a_4 b_0 + a_2 b_2\right) x^4 + \left(a_2 b_1 + a_3 b_0 + a_1 b_2\right.$$
$$\left.+ a_0 b_3\right) x^3 + \left(a_2 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_1\right) x^2 + \left(a_0 b_1 + a_1 b_0\right) x + a_0 b_0$$

Divisão

Efetuar a divisão de um polinômio *p* por um polinômio *g* é determinar outros dois polinômios: o quociente *q* e o resto *r*.

Isto fica mais bem representado assim:

$$\begin{array}{r|l} f(x) & g(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

Se o resto do polinômio não for nulo, r(x) ≠ 0 ,então:p(x) = g(x) . q(x) + r(x).

Se o resto do polinômio for nulo, r(x) = 0 , então p(x) = g(x) . q(x).

O quociente q(x) e o resto r(x) podem ser determinados pelos os comandos "***quo***(*dividendo*, *divisor*, *variável*)" e "***rem***(*dividendo*, *divisor*, *variável*)", respectivamente. Acompanhe os exemplos abaixos:

Exemplo

> restart :

> $p := x^5 + 2x^3 + x + 1;$

$$p := x^5 + 2x^3 + x + 1$$

> $q := 2x^3 + 2;$

$$q := 2x^3 + 2$$

> $quo(p, q, x);$

$$\frac{1}{2}x^2 + 1$$

> $rem(p, q, x);$

$$-1 + x - x^2$$

Exemplo

> $v := 8 \cdot x^2 - 14 \cdot x - 15;$

$$v := 8x^2 - 14x - 15$$

> $w := 2 \cdot x - 5;$

$$w := 2x - 5$$

> $quo(v, w, x);$

$$4x + 3$$

> $rem(v, w, x);$

$$0$$

Equações polinomiais

Chamamos de equação polinomial ou algébrica à toda equação redutível à forma f(x) = 0, em que f(x) = $a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_2 x_2 + a_1 x_1 + a_0$ é um polinômio cujo grau n é maior ou igual a 1 e todas as constantes $a_{i's}$ e a variável x assumem valores complexos. Alguns exemplos de equações polinomiais são:

1. $3x^2 + 2 = x$
2. $5x^3 + 2x = 0$

Raiz de uma equação polinomial

A raiz de uma equação polinomial é um complexo r que quando substituído na equação transforma-a numa sentença verdadeira, isto é, f(r) = 0. Mas uma equação polinomial não tem necessariamente uma única raiz complexa, na verdade isso só acontece quando o grau n do polinômio f(x) associado à equação é igual a 1. Chegamos a esta conclusão graças ao Teorema da Decomposição de polinômios, que diz que todo polinômio

$$p(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_2 x_2 + a_1 x_1 + a_0 \quad \text{de grau n,} \quad n \geq 1,$$

pode ser escrito da forma p(x) = a_n (x- r1) (x – r2)...(x – r_n), onde a_n é o coeficiente dominante do polinômio e os $r_{'i's}$, com i = 1..n, são as raízes. Daí uma conseqüência bem direta deste teorema é a de que todo polinômio de grau n, n ≥ 1, admite n raízes complexas. A demonstração do Teorema da Decomposição é bem simples e é devida a dois teoremas que são: o Teorema Fundamental da Álgebra, que garante que todo polinômio de grau n, n ≥ 1, admite ao menos uma raiz complexa e o Teorema de D'Alembert, que afirma que todo polinômio f(x) de grau n, n ≥ 1, é divisível por x- a quando a é raiz de f(*x*), isto é, f(*a*) = 0.

No **Maple** usamos o comando "***solve*** (*equação*)" para encontrarmos as raízes de uma equação polinomial.

Exemplo

```
> solve(q, x);
```

$$-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} I\sqrt{3}$$

```
> solve(v, x);
```

$$\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}$$

```
> solve(p, x);
```

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} I\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3} + \frac{10}{3\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}} - \frac{1}{3}, \frac{1}{12}\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3} - \frac{5}{3\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\left(-\frac{1}{6}\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3} - \frac{10}{3\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}\right), \frac{1}{12}\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3} - \frac{5}{3\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} I\sqrt{3}\left(-\frac{1}{6}\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3} - \frac{10}{3\left(44 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}\right)$$

Utilizando o comando "***unapply*** (*expresssão, variável independente*)" , que serve para transformar uma expressão numa lei de formação de uma função, conseguimos verificar se os resultados encontrados são realmente as raízes da equação.

Exemplo

> $unapply(v, x);$

$$x \to 8x^2 - 14x - 15$$

> $unapply(p, x);$

$$x \to x^5 + 2x^3 + x + 1$$

Já para decompor um polinômio utilizamos a estrutura "***factor***(*polinômio*, *complex*)".

Exemplo

> $factor(v, complex);$

$$8.\ (x + 0.7500000000)\ (x - 2.500000000)$$

> $factor(p, complex);$

$$(x + 0.5698402910)\ (x + 0.2150798545 + 1.307141279\ I)\ (x + 0.2150798545 - 1.307141279\ I)\ (x - 0.5000000000 + 0.8660254038\ I)\ (x - 0.5000000000 - 0.8660254038\ I)$$

Observação:

- Podemos observar que os valores que acompanham as variáveis dentro do parênteses, possuem 10 casas decimais depois da vírgula, isso porque o **Maple** utiliza 10 casas decimais como aproximação padrão.Já vimos que isso pode ser modificado no princípio desta apostila.

Binômio de Newton

O desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados á Análise Combinatória.O caso n=2 já pode ser encontrado nos Elementos de Euclides , em torno de 300 a.C.O nome coeficiente binomial foi introduzido mais tarde por Stiffel , que mostrou , em torno de 1550 como calcular $(1 + x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1 + x)^{n-1}$.Isaac Newton(1646-1727) mostrou como calcular diretamente $(1 + x)^n$ sem antes calcular $(1 + x)^{n-1}$.

Em verdade, Newton foi além disso e mostrou como desenvolver $(a + b)^r$ onde r é um número racional , obtendo neste caso um desenvolvimento em série infinita.Precisamos observar que o binômio de Newton não foi uma invenção de Newton , porém , este recebeu seu nome pois ele desenvolveu uma generalização do coeficiente binomial.

Denomina-se Binômio de Newton , a todo binômio da forma $(a + b)^n$, sendo n um número natural.

Fórmula do termo geral de um binômio de Newton

Um termo genérico T_{p+1} do desenvolvimento de $(a + b)^n$, sendo p um número natural é dado por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} . a_{n-p} . b \text{ , onde } \binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

No **Maple** usaremos o comando "***expand***" para vermos o desenvolvimento dos binômios.

Exemplo

Determine o 3º termo da expressão $(2x - 3y)^4$.

> $B := (2 \cdot x - 3 \cdot y)^4;$

$$B := (2\,x - 3\,y)^4$$

> $expand(\%);$

$$16\,x^4 - 96\,x^3\,y + 216\,x^2\,y^2 - 216\,x\,y^3 + 81\,y^4$$

Logo o 3º termo do desenvolvimento é $216x^2y^2$.

Exemplo

Qual o termo médio no desenvolvimento de $(y - \frac{4}{y})^8$?

O expoente do binômio é 8 , então p=4 e p+1=5 , logo o termo médio é o 5º elemento.

> $C := \left(y - \frac{4}{y}\right)^8;$

$$C := \left(y - \frac{4}{y}\right)^8$$

> $expand(\%);$

$$y^8 - 32\,y^6 + 448\,y^4 - 3584\,y^2 + 17920 - \frac{57344}{y^2} + \frac{114688}{y^4} - \frac{131072}{y^6} + \frac{65536}{y^8}$$

Logo o termo médio do desenvolvimento é 17920.

Exemplo

Dado o binômio $\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)^6$, qual é o seu termo independente?

Para encontrarmos o termo independente de x tem-se que:

$$> E := \left(\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)^6;$$

$$E := \left(x+\frac{1}{x}\right)^6\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$$

Mas $\left(\frac{x+1}{x}\right)^6\left(\frac{x-1}{x}\right)^6 = \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^6$, então:

$$> E := \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^6;$$

$$E := \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^6$$

Utilizamos o comando “***expand(%)***” em $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^6$, pois esta é uma expressão mais simplificada daí:

$$> expand(\%);$$

$$x^{12}-6x^8+15x^4-20+\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^8}+\frac{1}{x^{12}}$$

Com isso vemos que o termo independente é -20.

Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh , na China , em torno de 1300 e antes disso pelos hindus e árabes.O matemático hindu Báskhara conhecido geralmente pela “fórmula de Báskhara” para a solução da equação do 2º grau , sabia calcular o número de permutações , de combinações e de arranjos de n objetos.Assim como o matemático e filósofo religioso francês Levi ben Gerson(1288-1344) ,que nasceu e trabalhou no sul da França , e que , entre outras coisas , tentou demonstrar o 5º Postulado de Euclides.

O primeiro aparecimento do Triângulo de Pascal no ocidente foi no frontispício de um livro de Petrus Apianus (1495-1552).Nicola Fontana Tartaglia(1499-1599) relacionou os elementos do triângulo de Pascal com as potências (x + y).Pascal(1623-1662) publicou um tratado em 1654 mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento $(a+b)^n$.Jaime Bernoulli(1654-1705) , em seu Ars Conjectandi ,de 1713 , usou a interpretação de Pascal para demonstrar que:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^n$$

Vamos ver um exemplo do binômio $(x+1)^4$.

Exemplo

```
> restart :
> with(PolynomialTools) :
> b := (x + 1)^4;
```

$$b := (x+1)^4$$

```
> CoefficientList(b, x);
```

$$[1, 4, 6, 4, 1]$$

Sabemos que o coeficiente tem grau 4, logo começamos da esquerda pra direita os coeficientes 4 ,3 ,2 ,1 e o termo independente , ou como conhecemos:

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Podemos representar esses coeficientes em forma de vetores - coluna, utilizando o comando “***CoefficientVector***(*equação*,*variável*)”.

Exemplo

```
> CoefficientVector(b, x);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O comando “***coeffs***” extrai todos os coeficientes de um polinômio. Se utilizarmos a estrutura “***for*** *n* ***from*** *limite inferior* ***to*** *limite superior* ***do***” estaremos mandando o programa realizar uma ação que deve ser escrita após o ***do***, enquanto *n* assume valores inteiros que vão desde o limite inferior até chegar no limite superior. Se utilizarmos os dois comandos juntos teremos os coeficientes dos polinômios até um certo *n* determinado.

O triângulo de Pascal nada mais é do que os coeficientes de um binômio dispostos ordenadamente. Vamos montar o triângulo de Pascal no exemplo a seguir. Para isso precisaremos utilizar os comandos acima citados e um binômio.

Exemplo

Utilizaremos então o binômio $(x+1)^n$, temos que:

```
> p := (x + 1)^n;
                              p := (x + 1)^n
> for n from 0 to 15 do; CoefficientList(p, x);end do;
                                   [1]
                                  [1, 1]
                                 [1, 2, 1]
                                [1, 3, 3, 1]
                               [1, 4, 6, 4, 1]
                             [1, 5, 10, 10, 5, 1]
                            [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]
                          [1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1]
                         [1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1]
                      [1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1]
                  [1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]
                [1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1]
              [1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1]
         [1, 13, 78, 286, 715, 1287, 1716, 1716, 1287, 715, 286, 78, 13, 1]
     [1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1]
 [1, 15, 105, 455, 1365, 3003, 5005, 6435, 6435, 5005, 3003, 1365, 455, 105, 15, 1]
> CoefficientList(p, x);
 [1, 16, 120, 560, 1820, 4368, 8008, 11440, 12870, 11440, 8008, 4368, 1820, 560, 120, 16, 1]
```

Observação:

Podemos perceber que depois de ser colocado todos os comandos, usamos pela linguagem de programação o comando "***end do***", que serve para encerrarmos os comandos realizados em programação.

Polígonos

Dada uma sequência de pontos de um plano (A_1 ,A_2 ,...,A_n), com n ≥ 3, todos distintos , onde três pontos consecutivos não são lineares e considerando-se consecutivos A_{n-1} , A_n e A_1 assim como , A_n , A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ . .

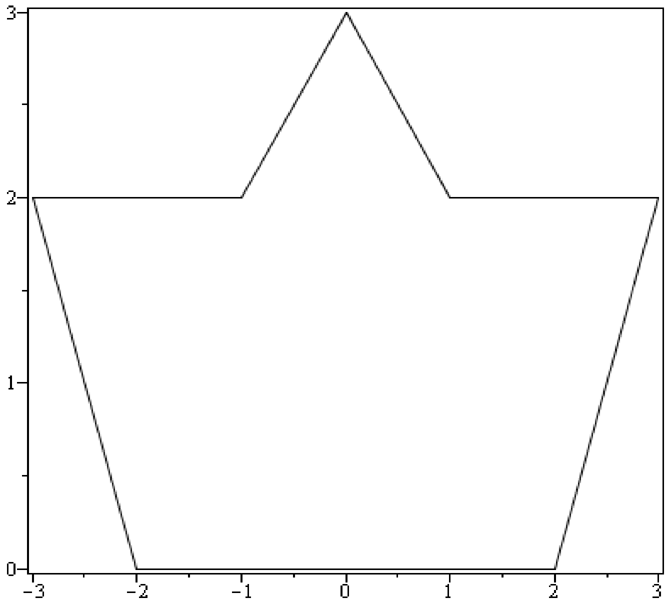
Polígono convexo **Polígono côncavo**

A reunião de um polígono com seu interior é uma região poligonal ou superfície poligonal.

No **Maple** utilizaremos o comando "***polygonplot***" para construir uma superfície poligonal. Assim , teremos "***polygonplot***(*nome* , *opções*)".As opções não são obrigatórias assim como o nome que pode ser substituído inserindo todos os pontos do polígono.

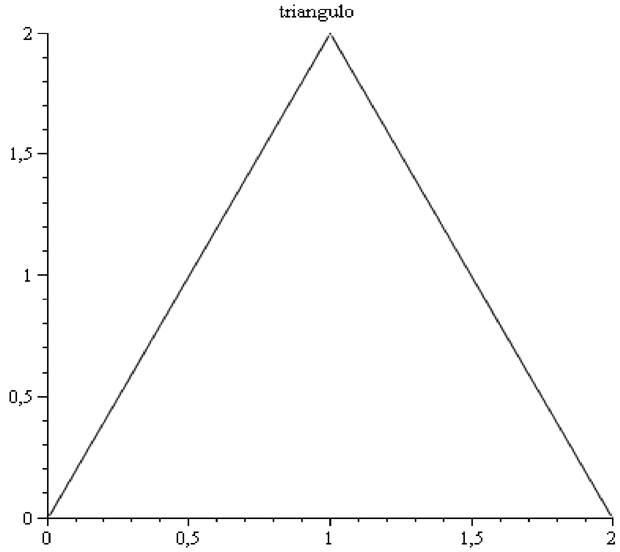
Exemplo

```
> with(plots) :
> barco := [[-3, 2], [-1, 2], [0, 3], [1, 2], [3, 2], [2, 0], [-2, 0], [-3, 2]];
                barco := [[-3, 2], [-1, 2], [0, 3], [1, 2], [3, 2], [2, 0], [-2, 0], [-3, 2]]
> polygonplot(barco, axes = boxed, color = white);
```



Exemplo

```
> T := [[0, 0], [1, 2], [2, 0]];
                              T := [[0, 0], [1, 2], [2, 0]]
> c1 := pointplot(T, color = white, title = "triangulo") :
> c2 := polygonplot(T, color = white) :
> display(c1, c2);
```



Observação:

- A opção "*axes* = *boxed*" nada mais é do que o gráfico ficar localizado dentro de um quadrado.

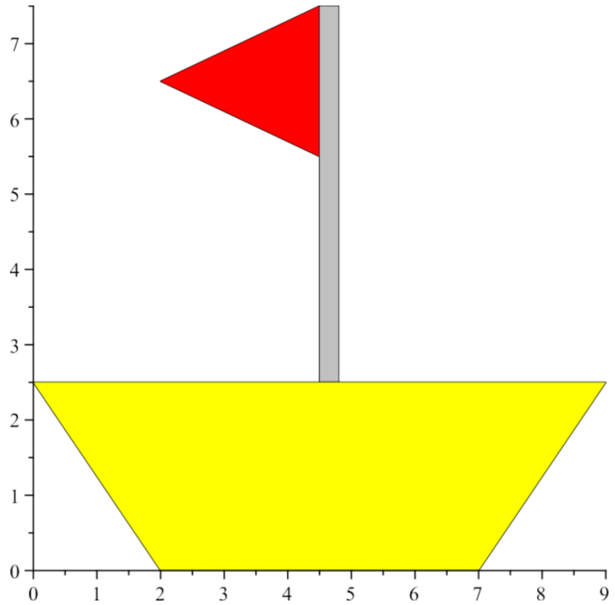
Construção de Desenhos

Além das aplicações citadas anteriormente para o **Maple**, também podemos usá-lo como uma ferramenta de desenho. Através da junção de gráficos, polígonos e outras figuras planas com um pouco de criatividade, podemos criar várias figuras legais. E com isto, trabalhar ao mesmo tempo a criatividade e o aprendizado matemático.

Vamos carregar o pacote *plots,* digite ***with***(*plots*):, e carregar o comando ***plottools***, digite ***with***(*plottools*):. Utilizaremos o comando "***polygonplot***(*[coordenadas dos vértices do polígono],opções*)" para construir polígonos, seja regular ou não, a partir de uma lista de coordenadas de seus vértices. Na figura abaixo foi construído um barco utilizando o comando ***polygonplot.*** Observe que o último comando utilizado foi o "***display***(*Elemento***1**,..,*Elemento***n**) " que serve para desenhar vários elementos no mesmo plano.

Exemplo

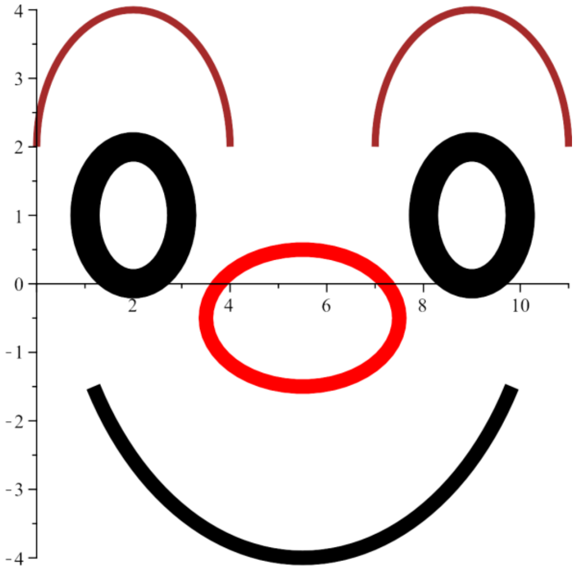
```
> with(plots) :
> Trapézio := [[0, 2.5], [2, 0], [7, 0], [9, 2.5]] :#Coordenadas dos 4 vértices do trapézio.
> Retângulo := [[4.5, 2.5], [4.8, 2.5], [4.8, 7.5], [4.5, 7.5]] :#Coordenadas dos vértices do retângulo.
> Triângulo := [[4.5, 7.5], [2, 6.5], [4.5, 5.5]] :#Coordenadas dos vértices do triângulo.
> P1 := polygonplot(Trapézio, color = yellow) :
> P2 := polygonplot(Retângulo, color = gray) :
> P3 := polygonplot(Triângulo, color = red) :
> display(P1, P2, P3);
```



Podemos trabalhar com outras figuras planas também. Se quisermos desenhar uma circunferência, basta utilizar o comando ***"circle***([*coordenadas do centro],raio,opções*)**"** .O comando ***"ellipse***([*coordenadas do centro],tamanho do eixo x,tamanho do eixo y*)**"** permiti –nos desenhar elipses. Se quisermos desenhar arcos de circunferência utilizamos o comando ***"arc***([*centro da circunferência que contém o arco],raio da circunferência,ângulo em que o arco inicia..ângulo em que o arco termina)***"*** .Abaixo fizemos um desenho utilizando esses comandos.

Exemplo

```
> with(plots) : with(plottools) :
> Olho1 := circle([2, 1], 1, thickness = 20) :
> Olho2 := circle([9, 1], 1, thickness = 20) :
> Sobrancelha1 := arc([2, 2], 2, 0..Pi, thickness = 5, color = brown) :
> Sobrancelha2 := arc([9, 2], 2, 0..Pi, thickness = 5, color = brown) :
> Nariz := ellipse([5.5, -0.5], 2, 1, color = red, thickness = 10) :
> Boca := arc([5.5, 1], 5, -Pi/6..-5/6 Pi, thickness = 10) :
> display(Olho1, Olho2, Sobrancelha1, Sobrancelha2, Nariz, Boca);
```



Observação:

- A opção ***thickness*** usada no exemplo anterior, tem a função de aumentar a espessura de uma linha.

Índice Remissivo de Comandos

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

W

Referências Bibliográficas

IEZZI, Gelson; *et all*. **Matemática: Ciência e Aplicações,** 1ª série: ensino médio. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; *et all*. **Matemática: Ciência e Aplicações,** 3ª série: ensino médio. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; *et all*. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol.1. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, Gelson; *et all*. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol.2. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, Gelson; *et all*. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol.6. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, Gelson; *et all*. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol.9. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1977

ANDRADE, L. N. **Introdução à Computação Algébrica com o Maple**. Paraíba, 2003. (Apostila).

NAGAMINE, A. **Um Curso de Maple**. Santa Cruz, 2001. (Apostila).

MÁRQUEZ, Rosa; *et all*. **O Maple como Ferramenta para o Processo de Ensino Aprendizagem.** Rio de Janeiro, 2009. (Apostila).

MORGADO,Augusto;*et-all*.**Análise Combinatória e Probabilidade,Coleção do Professor de Matemática.**Rio de Janeiro:SBM,1991

LUCHETTA,Valéria.Coordenação de Francisco César Polcinio Milles.Desenvolvido pelo Instituto de Matemática e Estatística em São Paulo,2000.Apresenta texto sobre a história dos números amigos.Disponível em:< http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/namigos.html>.Acesso em: 13 jan. 2011.

RODRIGUES,Rosália;MIRANDA,Emília.Formas e Números,1999.Apresenta textos sobre números figurados.Disponível em:<http://www.atractor.pt/mat/numeros/index.html>.Acesso em:13 jan. 2011.

VENTURI,Jacir.2002.Apresenta texto sobre René Descartes.Disponível em: < http://www.geometriaanalitica.com.br/fermat-promove-o-maior-desafio-da-matematica.html>.Acesso 17 jan. 2011.

MARCOS,Noé.Desenvolvido pelo Brasil Escola.Apresenta texto sobre plano cartesiano e produto cartesiano.Disponível em:

< http://www.brasilescola.com/matematica/plano-cartesiano.htm>Acesso em:18 jan. 2011