UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
FACULDADE DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Faculdade de Formação de Professores
U E R J

# O Maple como Ferramenta para o Processo de Ensino e Aprendizagem

*" O saber está além do computador"*

## Conteúdo



### Resumo

São conhecidas as dificuldades que muitos alunos apresentam na compreensão de conteúdos da matemática. O computador oferece atualmente varias possibilidades para ajudar a resolver os problemas de insucesso das ciências em geral. Apesar do balanço da utilização dos computadores no ensino se revelarem inegavelmente positivo, obtém numerosos problemas por resolver. O potencial pedagógico dos computadores só poderá ser plenamente realizado se estiverem disponíveis programas educativos de qualidade e se existir uma boa articulação deles com os currículos e a prática, o aplicativo Maple é um deles. A finalidade de este trabalho apresentar uma introdução ao Maple e mostrar que é possível utilizar este aplicativo como ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem nos colégios. Assim esta apostila tem como objetivo servir como material de apoio na utilização do Maple no ensino básico, para o qual iniciamos abordando o Maple como um calculadora simples e científica. Apresentamos os principais tópicos estudados no ensino fundamental e médio. Consideramos  o Maple como um recurso educacional capaz de despertar o interesse dos estudantes para o estudo da matemática.

Palavras-chave: Ensino da matemática, Maple, Recurso educacional, Aplicativo pedagógico.

## Prefácio

O ensino da matemática em forma tradicional é uma tarefa difícil. Nossa objetivo deve ser facilitar a aprendizagem, sem perda de conteúdo. Além disso a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional(Lei 9.394/96) estabelece vínculo ao mundo do trabalho e à prática social. "A comunidade de Educação Matemática internacionalmente vem clamando por renovações na atual concepção do que é a matemática escolar e de como essa matemática pode ser abordada (ver Cockcroft, 1982; NCTM, 1989). Questiona-se também a atual concepção de como se aprende matemática.

Algumas competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática, também estabelecidas nos parâmetros curriculares é a utilização adequada de recursos tecnológicos como instrumento deprodução e comunicação além da utilização adequada de calculadoras e computadores, reconhecendo suas limitações e potencialidades. Nesse sentido, o Maple é a ferramenta de integração curricular da matemática em seus fundamentos teóricos, porque possibilita aos professores e alunos a realização de um imenso conjunto de práticaseducacionais e laboratoriais num só ambiente. O desenvolvimento do aplicativo Maple começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo em Waterloo, no Canadá, província de Ontário e continua sendo melhorado.

O Maple é uma linguagem de computação que possui quatro aspectos gerais que são: Aspectos algébricos aspectos numéricos, aspectos gráficos e aspectos de programação. No Maple podemos accionar funções do aplicativo, produzir textos, obter gráficos ou incluir hiperlinks.Todos estes aspectos estão integrados formando um corpo único. Por exemplo, a partir de um resultado algébrico, uma análise numérica ou gráfica pode imediatamente ser feita. Em geral, na análise de um problema, várias ferramentas são necessárias. Se estas ferramentas não estiverem no mesmo software, um usuário enfrentará uma serie de difculdades para compatibilizar a saída de um software com a entrada de outro, além de ser obrigado a familiarizar-se com diferentes notações e estilos. É claro que o Maple não elimina completamente o uso de linguagens numéricas ou gráficas. Em aplicações mais elaboradas pode ser necessário usar recursos de linguagens como C ou Fortran. O Maple tem interface com estas linguagens no sentido de que um resultado algébrico encontrado no Maple pode ser convertido para a sintaxe da linguagem C ou Fortran 77.

Os aspectos novos trazidos pelo Maple juntamente com outros sistemas algébricos são a computação algébrica e a programação simbólica. A computação algébrica e uma área que teve um forte impulso nas décadas de 60 e 70, onde foram criados importantes algoritmos para integração analitica e fatoração de polinômios. Estes algoritmos estão baseados na Álgebra Moderna, que guia toda a implementação do núcleo de qualquer sistema algébrico. O Maple é uma linguagem de programação simbólica. Os construtores deste sistema optaram em desenvolver um pequeno núcleo escrito na linguagem C gerenciando as operações que necessitam de maior velocidade de processamento, e a partir deste núcleo, desenvolveram uma nova linguagem. O próprio Maple foi escrito nesta nova linguagem. Mais do que 95% dos algoritmos estão escritos na linguagem Maple, estando acessíveis ao usuário. Esta opção dos seus arquitetos e muito saudável, pois uma linguagem que pode gerar todo um sistema algébrico do porte do Maple certamente é uma boa linguagem de programação.

## Introdução

São conhecidas as dificuldades que muitos alunos apresentam na compreensão de conteúdos da matemática. Entre as razões do insucesso na aprendizagem da matemática existem métodos de ensino exaustivos das teorias de aprendizagem mais recentes assim como falta de meios pedagógicos modernos. A necessidade de diversificar métodos para combater o insucesso escolar, que e particularmente nítido nas ciências exatas, conduziu ao uso crescente e diversificado do computador no ensino da Matemática. O computador oferece atualmente varias possibilidades para ajudar a resolver os problemas de insucesso das ciências em geral. Apesar do balanço da utilização dos computadores no ensino se revelarem inegavelmente positivo, obtém numerosos problemas por resolver. Com efeito, não obstante as suas reconhecidas potencialidades, o computador não se tornou a chave mágica do sucesso educativo. O potencial pedagógico dos computadores só poderá ser plenamente realizado se estiverem disponíveis programas educativos de qualidade e se existir uma boa articulação deles com os currículos e a prática. Assim esta apostila tem como objetivo servir como material de apoio na utilização do Maple no ensino básico.Um recurso educacional capaz de despertar o interesse dos estudantes para o estudo da matemática.

Antes de apresentar os comandos do Maple, queremos deixar bem claro, que este aplicativo é apenas uma ferramenta para auxiliar o ensino da matemática, o professor não pode, nem poderá ser substituído por qualquer tipo de máquina, pois cabe a nós educadores transmitir sabedoria, não somente informação e isto podemos conseguir baseados na ciência e humanismo.

Neste trabalho tentaremos passar as ferramentas básicas através de exemplos, que podem ser utilizadas em sala de aula (ensino médio), 2 horas/aula por mês. Abordaremos os tópicos básicos de matemática, vistos nas séries iniciais. Iniciamos com os comandos, abordamos o Maple como se fosse uma calcularora simples, científica para uma melhor familiarização do aplicativo. Nas seguintes seções serão abordados os conceitos fundamentais, tais como aritmética (conjuntos, mmc, MDC, frações), álgebra (equações algébricas, solução de eq. de 1o e 2o grau, equações trigonométricas, logaritmicas), geometría plana e espacial (reconhecimento das figuras). Fazendo uso desta ferramenta o aluno obterá mais autoconfiança ao verificar um exercício proposto pelo professor ou do livro texto utilizado no transcurso do ano letivo.

Em várias universidades e alguns colégios, certas matérias são dadas com o auxílio de softwares, observando que estes não prejudicam o raciocínio lógico-formal do aluno. Também se verifica um aumento substancial do interesse do aluno pela matemática. Esperamos conscientizar os profissionais ligados à educação sobre o uso e as limitações do uso de computadores no ensino. Lembremos que o uso indiscriminado do computador provoca a diminuição do espírito crítico nos alunos e/ou pode levar a um falso saber. Esperamos que aconteça isso com os nossos alunos!, assim como também esperamos contar com seus comentários e sugerencias para poder aprimorar este trabalho.

## Comandos Básicos

### Principais Comandos

Ao abrir a maple, aparece uma folha de trabalho, na qual podemos accionar funções do aplicativo, produzir textos, obter gráfico ou incluir hiperlinks. Ao salvar esta folha se cria um arquivo do tipo nome.mw . A interface gráfica do Maple não oferece dificuldade para os usuarios, o "help" (ajuda) contem muitos exemplos práticos. No menú temos vários icones para salvar, imprimir, modificar o trabalho para tipo texto, zoom, etc. Mas também podemos utilizar os botões de atalho. A seguir apresentamos uma tabela como os principais comandos:

| COMANDO | UTILIDADE | EXEMPLO |
|---|---|---|
| restart | Serve para limpar a memória (RAM) do Maple. | restart; |
| ; | Após cada comando digitamos ";" para que mostre o resultado. | sin(2); |
| evalf(a,b) | É usado antes dos comandos para executar o calculo. | evalf(2,2); |
| % | O símbolo "%" , puxa o último valor calculado. | evalf(%); |
| # | É usado para colocar comentários após o comando. | sqrt(9);#raiz quadrada de 9. |
| : | Omite o resultado da operação | 1+5: |
| + | Soma valores | 2+3; |
| * | Multiplica valores | 6*2; |
| - | Subtrai valores | 4-3; |
| / | Divide valores | a/b; |
| x^y | O símbolo ^ é usado para elevar x a uma determinada potência y. | 4^2; |
| a./b | uso de (.) antes do sinal de divisão faz retornar o valor em decimais. | 2./3; |
| sqrt(x) | Calcula a raiz quadrada de x | sqrt(9); |
| n! | Calcular o fatorial de um número n. | 8! |
| rationalize | Racionalizando a expressão. | rationalize(x/sqrt(y)); |
| union | Faz a união entre os conjuntos. | A union B; |
| intersect | Faz a interseção entre os conjuntos. | A intersect B; |
| minus | Faz a subtração entre conjuntos. | A minus B; |
| abs | Valor absoluto. | abs(2); |
| $ | Mostra os números naturais entre a e b. | A:={$ a..b}; |
| nops | Determina o n° de elementos do conjunto. | nops(A); |
| divisors | Mostra os divisores positivos de um número a. | divisors(a); |
| ifactor | Decompõe a em fatores primos. | ifactor(a); |
| a in B | (relação de pertinência)verifica se o elemento a pertence ao conjunto B. | 2 in A; |
| numer | Exibe o numerador de x/y. | numer(x/y); |
| simplify | Resolve a expressão simplificando | simplify(x/y+x/2*8); |
| lcm | Calcula o MMC entre a,b,c,d. | lcm(2,6,7,10); |
| distance(x,y) | Calcula distância entre x e y. | Distance(2,6) |
| subset | Verifica se um subconjunto está contido num determinado conjunto B. | {4,5} subset B |
| convert(0.001,fraction) | Coloca o valor sob forma de fração. | convert(0.001,fraction) |
| convert (17.25,binary,30) | Converte da base 2 para a decimal com 30 algarismos. | convert (17.25,binary,30) |
| convert (17.25,binary,30) | Converte da base 8 para a base 10. | convert (17.25,binary,30) |
| gcd | Calcula o MDC de 2 números | gcd(18,12) |

```
>
```

### Observações

```
> restart;
```

1) O comando "restart" serve para limpar a memória (RAM) do maple.
2) Após cada comando digitamos ";" para que mostre o resultado. Se digitamos ":" ex: sin(2.): o maple executa, contudo, não mostra o resultado.Veja:

```
> sin(2.):
```

```
> sin(2.);
```

$$0.9092974268$$

3) O comando " evalf" seve para avaliar (efetuar) um resultado.Ex.:

```
> cos(Pi);
```

$$-1$$

```
> evalf(%);
```

$$-1.$$

Observação: evalf(a,m); Calcula o valor de "a" com "n" dígitos.

4) O símbolo "%", mostra o último resultado (valor).
5) O símbolo "#" é usado para adicionar comentários. Observe:

```
> exp(x);# função exponencial.
```

$$e^x$$

```
> EXP(X);# só escreve
```

$$EXP(X)$$

6) O maple faz distinção entre letras maiúsculas e minúsculas.A<>a.
7) Nas operações fundamentais utilizamos os símbolos:

"+" para a adição;
"-" para a subtração;
"*" para o produto;
"/" para a divisão;
" ^" para a potência;
"sqrt" para raiz quadrada (square root).

8) Calcular

```
> sqrt(5);# Trabalha com números inteiros, por isso só mostra a função.
```

$$\sqrt{5}$$

```
> sqrt(5.);# Trabalha com números reais, por isso mostra o resultado.
```

$$2.236067977$$

## Nomenclaturas

1. Nomeclatura das Funçoes Trigonométricas e Hiperbólicas

sin(x) =>seno.
cos(x) =>cosseno.
tan(x)=>tangente.
sec(x) =>secante.
csc(x) =>cossecante.
cot(x)=>cotangente.

sinh(x)=>seno hiperbolico.
cosh(x)=>cosseno hiperbolico.
tanh(x)=>tangente hiperbolica.
sech(x)=>secante hiperbolica.
csch(x)=>cosecante hiperbolica.
coth(x)=>cotangente hiperbolica.

2. Nomeclatura das Funçoes Trigonométricas Inversas.

arcsin(x) =>arcosseno.
arccos(x)=>arcocosseno.
arctan(x)=>arcotangente.
arcsec(x) =>arcosecante.
arccsc(x) =>arcocossecante.
arccot(x)=>arcocotangente.
arcsinh(x)=>arcoseno hiperbolico.
arccosh(x) =>arcocosseno hiperbolico
arctanh(x)=> arcotangente hiperbolico.
arcsech(x) =>arcosecante hiperbolico.
arccsch(x)=>arcocossecante hiperbolico.
arccoth(x)=>arcotangente hiperbolico

3. Exponenciais e Logaritmos
Exp =>exponencial.
exemplo: exp(3*x); 2^(x);

log10 =>log[b] onde b é a base do logaritimo.

ln(x)=>logarítmo neperiano.
log(x)=>logaritimo na base 10.
log[b](x) =>logarítmo na base (b).
log10(x)=>logarítmo na base 10.
exemplo:
log10 =>log[b] onde b é a base do logaritimo.

### Combinação das teclas básicas

control+C =>seleciona o testo para copias.
control+v =>cola o texto selecionado.
control+x=>recorta(deleta) a porte selecionada.
Control+p=>para imprimir (arquivo,pagina).
control+s=>salva o trabalho.
control+N=>abre nova folha de trabalho.
control+M=>transforma texto em comando(matemático).
control+M+=>transforma o texto em uma subseção.
control+1=> (50%).
control+2=>(100%).
control+end=>leva o cursor para o final da folha de trabalho.
control+home=>leva o cursor para o inicio da folha de trabalho.

## Maple como uma calculadora Simples


Nesta seção vamos explorar os comandos do maple nas operações fundamentais, abordando o Maple como uma calcularoda simples, com a finalidade de familiarizarnos com o aplicativo.

### Adição

Para somar dois números ou mais utilizamos o símbolo "+". Ex.:

```
> 2+23;# no final escrevemos ";"
```

$$25$$

```
> 33+82:# desta forma não mostra o resultado
> 2.3+5.02+15.334;
```

### Subtração

Para subtrair, 2 números utilizamos o símbolo "-". Ex.:

```
> 8-2;
```

$$6$$

```
> 15.3-4.8;
```

$$10.5$$

```
> 37.001-16.59-8.001039;
```

$$12.409961$$

## Multiplicação

Utilizamos o símbolo "*". Ex.:

```
> 12*30;
```

$$360$$

```
> 47.1*34.73;
```

$$1635.783$$

```
> 0.36*896;
```

$$322.56$$

## Divisão

Utilizamos o símbolo "/". Ex.:

```
> 28/3;
```

$$\frac{28}{3}$$

```
> evalf(%);# Realiza a operação( evalue).
```

$$3.857142857$$

```
> 1251/3;
```

$$417$$

```
> 28./3;;#ou 28/3.; ou 28./3.;
```

$$9.333333333$$

```
> evalf(27/7,50);
```

$$3.8571428571428571428571428571428571428571428571429$$

## Raiz Quadrada

Para calcular a raiz quadrada de um número, utilizamos o comando "sqrt". Ex.:

```
> sqrt(10);
```

$$\sqrt{10}$$

```
> sqrt(10.);
```

$$3.162277660$$

```
> evalf(sqrt(10.),80);# com 80 dígitos.
```

3.1622776601683793319988935444327185337195551393252168268575048527925944\
86392382

```
> sqrt(9)*sqrt(16);
```

12

Porcentagem (percentagem)

Como vimos o símbolo "%" serve para puxar o último valor (conta). No maple, não existe um comando específico para calcular porcentagem. Ex.:

```
> 5/100*283.5;
```

$$14.17500000$$

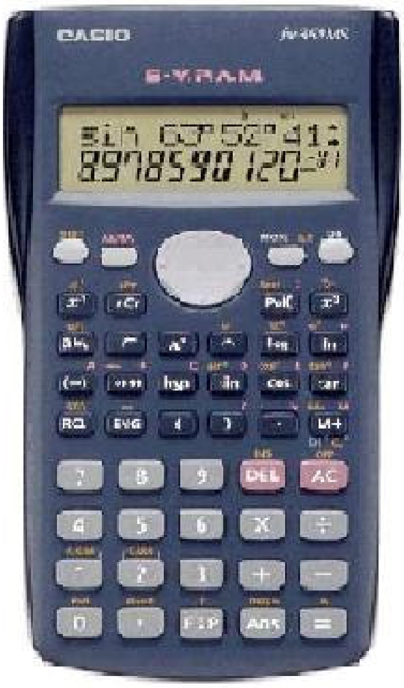
```
> 10/100*360;
```

$$36$$

Como calculamos uma multa de uma conta de telefone se o valor da fatura é 84,58 reais e a multa é de 2%.

## **Maple como uma calculadora científica.**

Nesta seção já acrescentamos outros comandos, com os quais realizamos os calculos que realiza uma calculadora científica.



O número "Pi"

É o número mais utilizado. Se escrevemos "pi" aparece o símbolo p. Se escrevemos "Pi", já entende como o valor numérico 3,14...

```
> pi;
```

$$\pi$$

```
> Pi;
```

$$\pi$$

```
> evalf(Pi, 500);
```

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640\
628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172\
535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097\
566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664\
821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536\

436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959\
195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122\
79381830119491

## Potências

Para determinar a "n" potencia de um número, utilizamos o símbolo "^" escrevemos: x^n; Ex:

```
> x^3;
```

$$x^3$$

```
> 5^8;
```

$$390625$$

```
> 2^7;
```

$$128$$

```
> 5^(1/3);
```

$$5^{1/3}$$

```
> 5.^(1/3);
```

$$1.709975947$$

```
> 5.^(4/7);
```

$$2.508484553$$

```
> 5.^(Pi);
```

$$5.^{\pi}$$

```
> evalf(5.^(Pi),50);# ou evalf(%,50);
```

$$156.99254530886590757845919883264891313914147464472$$

```
> (1/2)^(-5/3);
```

$$2\,2^{2/3}$$

```
> (1/2.)^(-5/3);
```

$$3.174802104$$

```
> (-4.)^(1/2);
```

$$2.000000000\,\mathrm{I}$$

```
> evalc(%);
```

$$2.718281828$$

## Função Exponencial

Utilizamos e=exp

```
> exp(1);
```

$$\mathrm{e}$$

```
> exp(1.);
```

$$2.718281828$$

```
> exp(10);
```

$$\mathrm{e}^{10}$$

```
> evalf(exp(1),50);
```

$$2.7182818284590452353602874713526624977572470937000$$

```
> x:=sqrt(2);# x recebe o valor de raiz de 2 (lhe é atribuido)
```

$$x := \sqrt{2}$$

```
> evalf(exp(x),20);
```

$$4.1132503787829275172$$

## Logaritmo

O logaritmo neperiano é denotado por " ln(x)"
O logaritmo decimal é denotado por "log10(x)"
O logaritmo na base "a" é denotado por "log [a](x)", a<>1, a >0
Exemplo: Calcule: ln (5), log10, log1,log[2]4, log [1/2]64, ln(exp(2))

```
> ln(5.);
```

$$1.609437912$$

```
> log10(10);
```

$$1$$

```
> log10(1);
```

$$0$$

```
> log[2](4);
```

$$2$$

```
> log[1/2](64);
```

$$-6$$

```
> ln(exp(2));
```

$$2$$

```
> exp(ln2);
```

$$e^{ln2}$$

```
> 10^(log10(8));
```

$$10^{\frac{3\ln(2)}{\ln(10)}}$$

```
> 10^(log10(8.));
```

$$8.000000000$$

```
> simplify(%);
```

$$8.$$

```
> log[1/3](27);
```

$$-3$$

## Fatorial

Calcular o fatorial de um número natural

x! = 1.2.3.....(x-1).x

```
> 2!;#2.1=2
```

$$2$$

```
> 5!;
```

$$120$$

```
> 50!;
```

$$30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000$$

```
> x:=5;n:=8;   n!/(n-x)!;
```

$$x := 5$$
$$n := 8$$
$$6720$$

## Funções Trigonométricas

São: seno -> sin(x)
cosseno -> cos(x)
tangente -> tan(x)
cotangente -> cot(x)

cossecante -> csc(x)
secante -> sec(x)

* Quando houver dúvidas quanto a escrita basta sombrear, por exemplo a palavra sin, vá ao link Help eteremos uma tela com todos as abreviações, adequada ao maple.

```
> sin(Pi);
```

$$0$$

```
> sin(Pi/6);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> sin(-Pi/4);
```

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

```
> cos(Pi);
```

$$-1$$

```
> cos(Pi-Pi/4);
```

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

```
> cos(Pi/8);
```

$$\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$$

```
> tan(Pi/2);# ocorre erro pois tangente de 90° não existe
Error, (in tan) numeric exception: division by zero
```

```
> cot(Pi/4);
```

$$1$$

```
> csc(0);# csc(x)= 1/sin(x) e sin
Error, (in csc) numeric exception: division by zero
```

```
> csc(Pi/2);
```

$$1$$

```
> sec(Pi/10);
```

$$\sec\left(\frac{1}{10}\pi\right)$$

Exemplos:

```
> ex1:= sin(Pi/4);
```

$$ex1 := \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

```
> ex2:=cos(Pi/4)+sin(Pi/4);
```

$$ex2 := \sqrt{2}$$

```
> ex3:=(cos(Pi/8))^2+(sin(Pi/8)^2);
```

$$ex3 := \cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{8}\pi\right)^2$$

```
> evalf(%);
```

$$1.000000000$$

```
> convert(30*degrees,radians);# convertendo de graus(degrees) para radiano
  (radians)=30°
```

$$\frac{1}{6}\pi$$

```
> sin(%);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> convert(75*degrees,radians); # 75°
```

$$\frac{5}{12}\pi$$

```
> cos(%);
```

$$\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.2588190451$$

```
> convert(40*degrees,radians);#40°
```

$$\frac{2}{9}\pi$$

```
> tan(%);
```

$$\tan\left(\frac{2}{9}\pi\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.8390996312$$

Funções Hipebólicas
A notação das funções hiperbólica:
senh(x) -> sinh(x)
cosh(x), tanh(x), coth(x), sech(x), csch(x)
E suas inversas são:
arcsinh(x), ascosh(x), arctanh(x), arccoth(x), arcsech(x), arccsch(x)

Exemplos: Calcule
senh(1); cosh(0); csch(5);

```
> sinh(1.);evalf(sinh(1.),50);#o valor arredondado
```

$$1.175201194$$

$$1.1752011936438014568823818505956008151557179813341$$

```
> (exp(1.)-exp(-1.))/2;evalf((exp(1.)-exp(-1.))/2,50);#o valor está trocado
```

$$1.175201193$$

$$1.1752011936438014568823818505956008151557179813341$$

```
> i:=((e^x)-e^(-x))/2;
```

$$i := \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

```
> sinh(i);
```

$$-\sinh\left(-\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right)$$

```
> cosh(0.);
```

$$1.$$

```
> csch(5.);
```

$$0.01347650583$$

```
> sinh(80.);
```

$$2.770311192\ 10^{34}$$

```
> arcsinh(4.);
```

$$2.094712547$$

```
> arcsin(4.);#saiu um número complexo I pois seno (sin) esta limitado entre
  1 e -1
```

$$1.570796327 - 2.063437069\, I$$

```
> arccsch(0.);
```

$$Float(\infty)$$

Observação do item acima:
* csch(x)= 1/ senh(x)= 0 -> arcsch(0)
senh(x)=0 <-> x=0
:. não existe
item  abaixo:
* sech(x)=1/cosh(x)=0

```
> arcsech(0.001);
```

$$7.600902210$$

```
> arccoth(2.);
```

$$0.5493061443$$

```
> arccosh(1.);
```

$$0.$$

```
> sech(0.);
```

$$1.$$

```
> csch(0.);# Não existe. csch(x)=1/senh(x)
```

$$Float(\infty)$$

```
> (cosh(4.))^2-sinh(4.)^2;
```

$$1.0000000$$

## História dos Números e Grandes Civilizações

Nesta seção apresentaremos um poquinho dos sistemas de numeração de

### Um pouco de história

O surgimento dos números e o processo de contar deram-se muito antes dos primeiros registros históricos. Acredita-se que nas épocas mais  primitivas o homem já tinha algum senso numérico: reconheciam quando eram   acrescidos  ou retirados objetos de uma pequena coleção, atributo que alguns   animais também apresentam. Corvos e chimpanzés distinguem modificações na     quantidade de    até cinco objetos; cachorros   e elefantes, na  quantidade de até três objetos.

Nos primeiros tempos da humanidade, para contar ou registrar dados eram usados os dedos, pedras, os nós de uma corda, marcas num osso, vara etc.  Com o passar do tempo, este sistema foi se aperfeiçoando até dar origem ao número. Lentamente os pequenos  grupos se   tornaram as primeiras   cidades que, ao se    desenvolverem, abrigaram as primeiras civilizações. Isso abriu espaço para o comércio entre elas e para a   necessidade da adoção de uma simbologia numérica. Cada civilização    criou um sistema de numeração em uma determinada base. Por exemplo, os egípcios, gregos, romanos, chineses e hindus optaram    pela base decimal;   os maias, pela    base 20; os   mesopotâmicos utilizavam    o sistema de  numeração na base 60.

Há 6000 anos, as sociedades primitivas egípcia e suméria viram a necessidade de represetar, com desenhos ou símbolos, mecanismos de troca, aferição de colheitas, divisão de terras, etc. Essa é a origem longínqua dos números que utilizamos até hoje.  Com as primeiras cidades sumerias e do Egito (4000 a.C.), desenvolveram-se s praticas de troca, a agricultura e a necessidade de simboliza-las. Por volta de 1650 a.C., o egípcio Aahmesu escreveu o Papiro Ahmes, um manual de matemática contendo 90 problemas do dia-a-dia, como preço de pão, a alimentação do gado, etc. Todos resolvidos. Ele é a base para os cientistas compreenderem o sistema numeração egípcio, que se baseava em 7 símbolos para representar 7 números-chave.

Para formar seu sistema de numeração, os romanos adotaram, no século III a.C., os símbolos numéricos correspondentes às letras do alfabeto. O número 44, por exemplo, é escrito como XLIV . Para escrever 4000 ou números maiores, os romanos usavam um traço horizontal sobre as letras. Assim não ficavam muito extensos. Um traço multiplicava o número representado abaixo dele por 1000.

Já os nosso números, os atuais, surgiram no século VI, quando  alguns centros de cultura grega foram fundados na Síria. Ao participar de uma conferencia num desses clubes, em 662, o bispo local Severus Sebokt, irritado com o fato de as pessoas elogiarem qualquer coisa vinda dos gregos, explodiu: Existem outros povos que também sabem alguma coisa! Os hindus, por exemplo, têm valiosos métodos de cálculo. São métodos fantásticos! E imaginem que os cálculos são feitos por apenas 9 sinais!  A referência a 9 símbolos significa que, na Índia, havia sido inventado no século VI, também, um símbolo para a posição vazio: o zero, que era representado na forma de um ovo de ganso. Pronto, estava completo o sistema de numeração dos algarismos indo-arábicos.

No século VIII, Harum al-Raschid (califa de Bagdá entre 786 e 809) tentou transformar a cidade no maior centro cientifico do mundo, contratando grandes sábios mulçumanos da época ,entre eles, o matemático árabe Mohammed Ibn-Musa al-Khowarizmi. Ao traduzir livros de matemática indianos para a língua árabe, al-Khowarizmi surpreendeu-se com estranhos símbolos, como o do ovo de ganso. Ao ver que, com aquele sistema de numeração, todos os cálculos seriam feitos de um modo mais rápido e seguro, decidiu contar ao mundo as boas novas, no livro Sobre a Arte Hindu de Calcular. Por ter sido criado pelos hindus e divulgado pelos árabes é que o sistema é chamado de indo-arábico , apesar de completo, só no século XVI seria aceito na Europa.

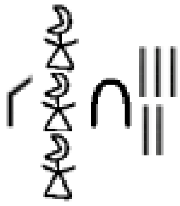
Para Pitágoras, o pai da matemática (aproximadamente 580 - 500 a.C.), os números eram a origem de todas as coisas. A ele e seus seguidores é atribuída a descoberta da tabuada.

**Egípcios (4500 a.C. - 300 a.C.)**

A civilização egípcia desenvolveu-se no vale do rio Nilo, onde ainda hoje é o Egito. A simbologia egípcia foi encontrada no interior e exterior das pirâmides do Egito. Essa escrita  desprovida de qualquer influência estrangeira. "Não apenas os sinais hieroglíficos que ela utiliza são todos tirados da fauna e da flora nilótica, O que prova que a escrita foi desenvolvida no local, mas ainda instrumentos e utensílios que figuram nela eram empregados no  Egipto desde o eneolítico antigo (inicio do IV milénio a.C.), o que é a prova de que a escrita (hieroglífica) é certamente o produto da civilização egípcia apenas  e que ela nasceu nas margens do Nilo."  (J. Vercoutter) Os egípcios não se preocupavam com a ordem dos símbolos e se eram dispostos  verticalmente ou horizontalmente.

| Número | Simbologia | Significado |
|---|---|---|
| 1 | \| | bastão vertical |
| 10 | ∩ | ferradura |
| 100 |  | rolo de pergaminho |
| 1 000 |  | flor-de-lótus |
| 10 000 |  | dedo curvado |
| 100 000 |  | sapo ou girino |
| 1 000 000 |  | homem ajoelhado |

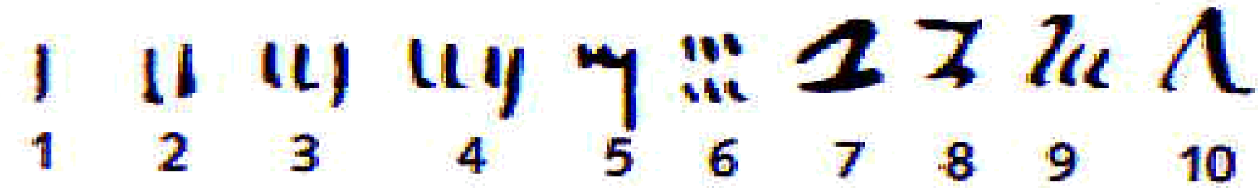
**Exemplos:**



$13\,015 = 1\times10^4 + 3\times10^3 + 1\times10 + 5\times1$

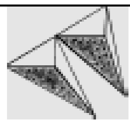
A numeração escrita egípcia foi fundada numa base rigorosamente decimal.

Mais tarde, os egípcios inventaram um sistema de numerais, sem usar hieróglifos, que registavam da direita para a esquerda.

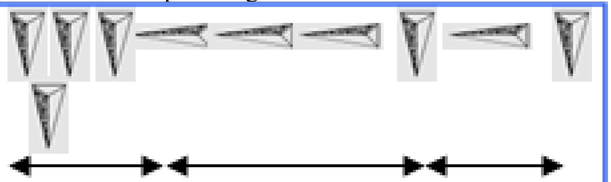



Mesopotamios (3500 a.C. - 500 a.C.) (Babilônicos)

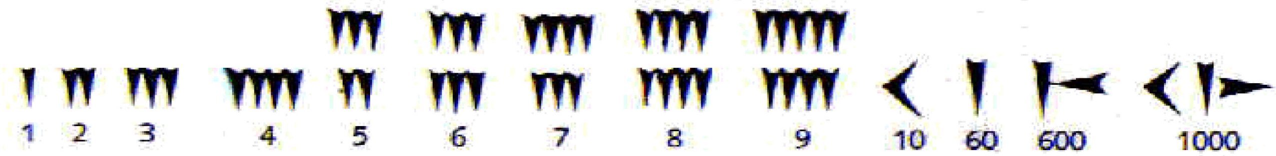
Os sumérios, babilônios e assírios habitavam a região que fica entre os rios Tigre e Eufrates, mais ou menos onde hojeé o Iraque.Os antigos historiadores gregos chamavam esta região de Mesopotâmia que significa entre os rios. Nas escavações arqueológicas realizadas nas cidades da Mesopotâmia foram encontrados milhares de placas de barro contendo registros numéricos. Os escribas da Mesopotâmia usavam um bastonete para escrever sobre placas com o barro ainda mole, cozidas depois no fogo ou apenas secadas ao sol. A base dos mesopotâmicos era 60 e utilizava-se somente de três símbolos.

| Números | Simbologia |
|---|---|
| 0 |  |
| 1 |  |
| 10 |  |

Inicialmente os números eram escritos em seqüência apenas utilizando os dois últimos símbolos da tabela 1.3, com potências de 60, como mostra o exemplo a seguir:



$16\,271 = 4\times60^2 + 31\times60 + 11$




Observação: A base 60 ainda hoje é empregada na medida do tempo e de ângulos em minutos e em segundos.
A hora tem 60 minutos.
O minuto tem 60 segundos.
Um grau equivale a 60 minutos.

**Gregos (1100 a.C.- 400 d.C.)**
Existiram três formas de numeração na Grécia, todos na base decimal: o mais antigo era baseado em cinco símbolos, e os outros dois, nas letras gregas maiúsculas e minúsculas, respectivamente. Na tabela a seguir apresentamos a mais conhecida:

| Números | Simbologia | Nome da letra grega |
|---|---|---|
| 1 | α | alfa |
| 2 | β | beta |
| 3 | γ | gama |
| 4 | δ | delta |
| 5 | ε | epsílon |
| 6 | ς | digama |
| 7 | ζ | zeta |
| 8 | η | eta |
| 9 | θ | teta |
| 10 | ι | iota |
| 20 | κ | capa |
| 30 | λ | lambda |
| 40 | μ | mi |
| 50 | ν | ni |
| 60 | ξ | csi |
| 70 | ο | ômicron |
| 80 | π | pi |
| 90 | ϙ | qoppa |
| 100 | ρ | rô |
| 200 | σ | sigma |
| 300 | τ | tau |
| 400 | υ | ípsilon |
| 500 | φ | fi |
| 600 | χ | qui |
| 700 | ψ | psi |
| 800 | ω | ômega |
| 900 | ϡ | sã |

Para os primeiros nove múltiplos de mil, o sistema adotou as primeiras nove letras do alfabeto grego (um uso parcial do principio posicional); que, para maior clareza, eram precedidas por uma vírgula antes do símbolo.

| ,α | ,β | ,γ | ,δ | ,ε | ,ς | ,ζ | ,η | ,ϙ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 | 7000 | 8000 | 9000 |

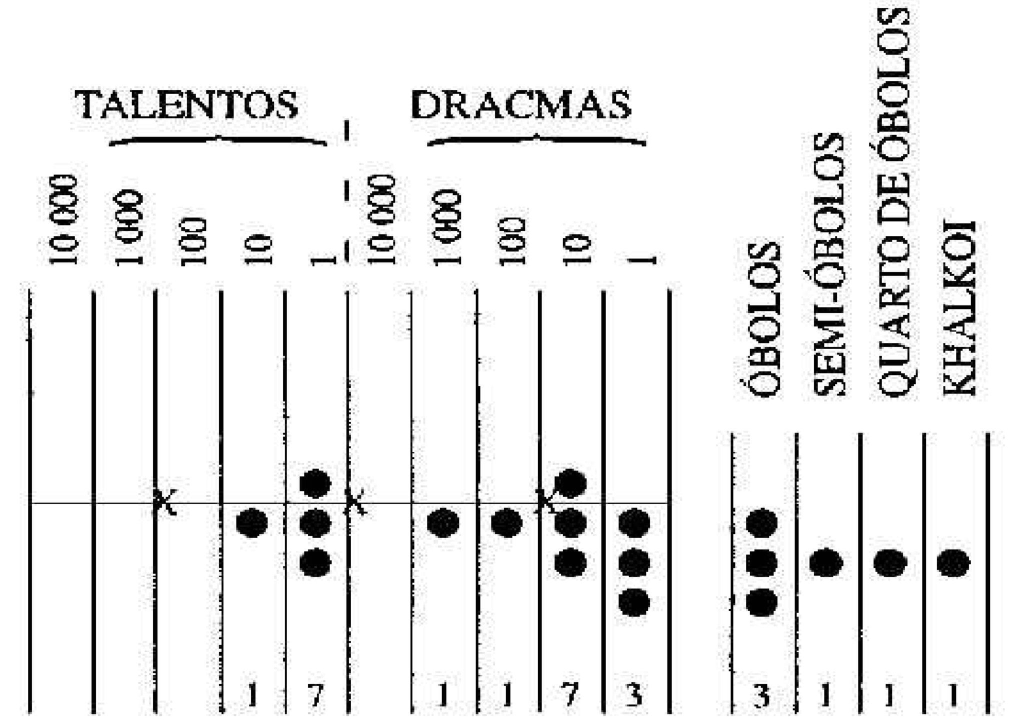
> Gregos={alpha, beta, gamma, delta, epsilon, digamma, zeta, eta, theta, iota, kappa, lambda,mu,nu, ksi, omicron, kappa, rho, sigma,tau, upsilon, phi, chi, psi,omega, san};

$$Gregos = \{\lambda, o, \kappa, \sigma, \upsilon, \omega, \gamma, \delta, \zeta, \varepsilon, \nu, \rho, \tau, \phi, \chi, \psi, ksi, \beta, \alpha, \theta, digamma, san, \eta, \mu, \iota\}$$

> 245=200+40+5; *em números gregos* : $\sigma\mu\varepsilon$

$$245 = 245$$

Para efetuar as operações aritméticas, os Gregos, fizeram, uso não dos seus algarismos, mas de ábacos.
É a esse tipo de instrumento de cálculo que aludiu o historiador grego Políbio pondo estas palavras na boca de Sólon: Os que vivem na corte dos reis são exactamente como as peças de uma mesa de contar. É a vontade do calculador que lhes fez valer um Khalkos ou um talento (História Natural, V, 26). o talento e o Khalkos eram, respectivamente, a mais forte e a mais fraca das unidades monetárias da Grécia antiga e estas eram simbolizadas pelas colunas extremas do ábaco de peças.
A figura seguinte representa o princípio do ábaco grego de Salamina, no qual, se vê a soma de 17 talentos, 1173 dracmas, 3 óbulos, 1 semi-óbulo, 1 quarto de óbolo e 1 Khalkos.



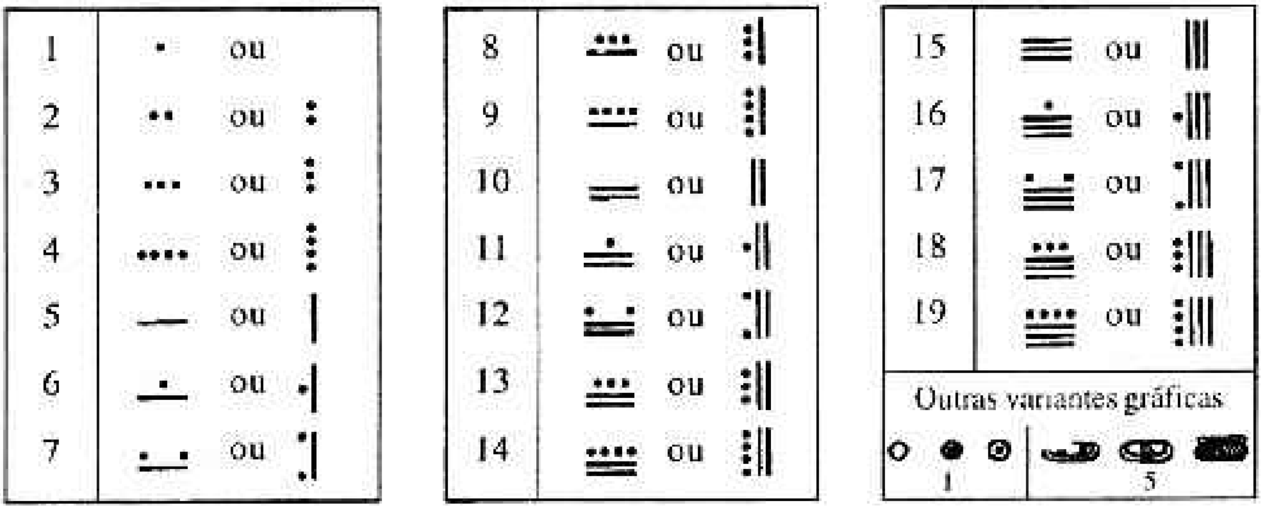

Maias (300 d.C. - 1600 d.C.)

Os maias habitavam a região onde hoje se localiza o sul do México e a América Central. Utilizavam a base 20 provavelmente por considerar o número total de dedos dos pés com o das mãos. Eles inventaram um sistema de numeração como um instrumento para medir o tempo e não para fazer cálculos matemáticos. Por isso, os números maias têm a ver com os dias, os meses e os anos, e com a maneira como organizavam o calendário. O calendário dos maias era composto por 18 meses de 20 dias cada um. Para ter um ano de 365 dias, acrescentavam 5 dias a mais. Estes dias não tinham nome e eram considerados desafortunados (wayeb). A numeração do povo Maia fundou-se no princípio da adição. Devia associar um círculo ou um ponto à unidade (sinal comum a todos os povos da América Central, originado do grão de cacau, então empregado como "moeda de troca").

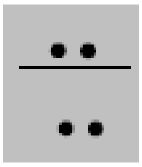
A numeração dos Maias dificilmente deveria prestar-se à prática das operações aritméticas e o sistema devia servir apenas para consignar os resultados de cálculos já efectuados. Este povo deveria fazer os seus cálculos através de um instrumento operatório análogo aos ábacos do Velho Mundo.

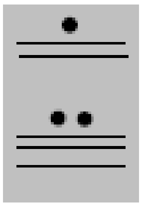
Seu sistema de numeração se resumia a três símbolos, assim como os mesopotânicos:

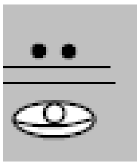
| Número | Simbologia | Significado |
|---|---|---|
| 0 |  | olho ou concha de um caracol ou ovalo |
| 1 | • | ponta do dedo ou um ponto |
| 5 | — | palma da mão ou cajado ou 5 pontos juntos |

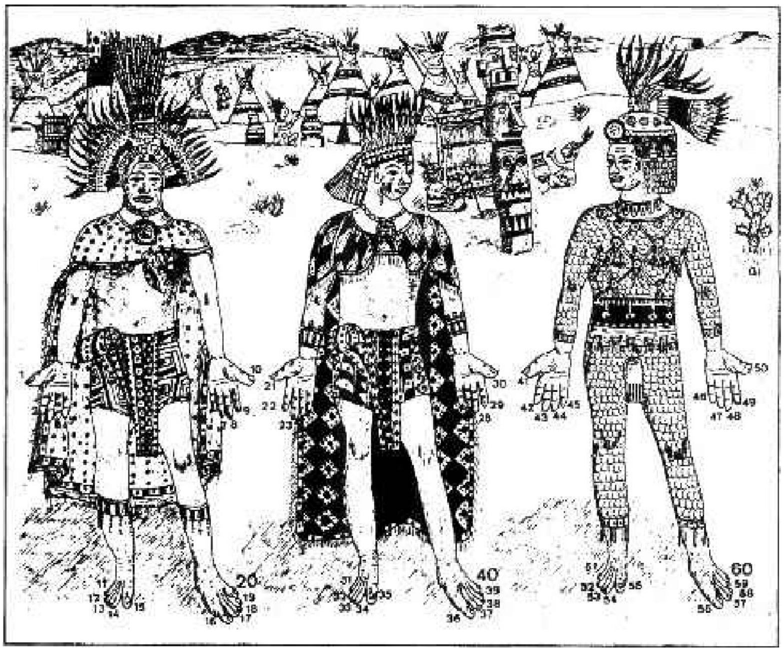



Outros Exemplos:

142 = 7×20 + 2 

237 = 11×20 + 17 

240 = 12×20 + 0 

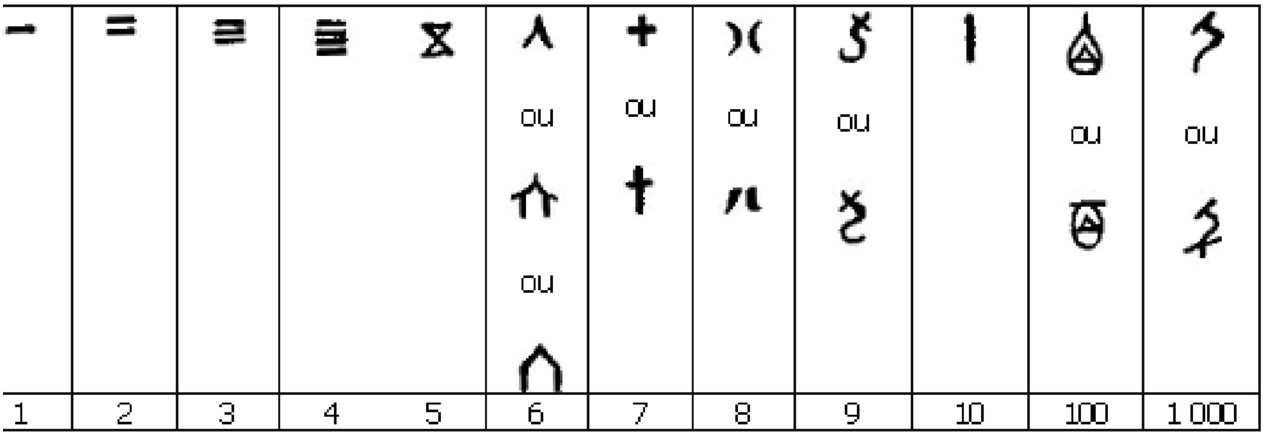


Chineses (700 a.C - 400 a.C.)
O sistema de numeração chinês é baseado num sistema gráfico com muitas formas abstratas e combinações de sinais arcaicos.

Um traço horizontal simbolizava a unidade, dois traços duas unidades e, analogamente, para três e quatro. A incapacidade de identificar directamente uma série de mais de quatro sinais idênticos não permite que este processo se repita continuamente. Sendo assim, para representar o algarismo 5, utilizavam traços que formavam um X fechado em cima e em baixo. O algarismo 6 era simbolizado por um V invertido ou ainda por um desenho em forma de templo. Para o algarismo 7 era utilizada uma cruz e duas semicircunferências de "costas" uma para a outra eram o símbolo utilizado para o algarismo 8. Para o 9 era usado um símbolo que faz lembrar o anzol.

Pensa-se que a escolha dos símbolos usados na representação dos algarismos chineses, ficou a dever-se à semelhança fonética que existia entre o símbolo e a palavra oral correspondente aos algarismos. Este fato poderia explicar a escolha de um homem para representar o 1 000.

Mas esta não é a única explicação: a escolha dos símbolos pode também ter sido de ordem religiosa.




Neste sistema, as dezenas, centenas e milhares são representadas segundo o principio multiplicativo, ou seja, agrupando os sinais correspondentes aos números necessários para obter o produto pretendido. Todos os outros números podem ser obtidos através de uma composição dos princípios multiplicativo e aditivo, tal como ilustra a figura seguinte;

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 1 + 10 | 10 | | 100 | 1 × 100 | 1 000 | 1 000 × 1 |
| 12 | 2 + 10 | 20 | | 200 | 2 × 100 | 2 000 | 1 000 × 2 |
| 13 | 3 + 10 | 30 | | 300 | 3 × 100 | 3 000 | 1 000 × 3 |
| 14 | 4 + 10 | 40 | | 400 | 4 × 100 | 4 000 | 1 000 × 4 |
| 15 | 5 + 10 | 50 | 10 × 5 | 500 | 5 × 100 | 5 000 | 1 000 × 5 |
| 16 | 6 + 10 | 60 | 10 × 6 | 600 | 6 × 100 | 6 000 | 1 000 × 6 |
| 17 | 7 + 10 | 70 | 10 × 7 | 700 | 7 × 100 | 7 000 | 1 000 × 7 |
| 18 | 8 + 10 | 80 | 10 × 8 | 800 | 8 × 100 | 8 000 | 1 000 × 8 |
| 19 | 9 + 10 | 90 | 10 × 9 | 900 | 9 × 100 | 9 000 | 1 000 × 9 |

Actualmente, o sistema decimal dos Chineses é compreendido por treze sinais fundamentais, respectivamente associados às nove unidades e às quatro primeiras potências de dez (10, 100, 1000, 10000). Sinais numéricos cujo traçado mais simples e mais comumente empregado em nossos dias é este:

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 七 | 八 | 九 | 十 | 百 | 千 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 100 | 1000 |

Romanos (500 a.C. - 500 d.C.)
Os números romanos foram ótimos para representar um número, mas para aritmética era muito complicado. Já antes do nascimento de Cristo, Roma era a sede de um vasto e poderoso império. Guerreiros e conquistadores, os romanos necessitavam lidar com grandes quantidades, utilizando os seguintes símbolos:

| Número | Simbologia |
| --- | --- |
| 1 | I |
| 5 | V |
| 10 | X |
| 50 | L |
| 100 | C |
| 500 | D |
| 1 000 | M |

Exemplos:
XV = 10+5 = 15
MMMX = 1 000 + 1 000 + 1 000 + 10 = 3 010
MDCCCCVIIII = 1 000+500+100+100+100+100+5+1+1+1+1 = 2 909

Muito mais tarde os romanos criaram uma regra para simplificar a escrita numérica: colocando-se algarismos à esquerda de algarismos maiores, subtraíam-se os valores. Esta regra somente era válida para os algarismos I, X, C e com as seguintes especificações;
I só podia vir antes do V e do X,
X, antes do L e do C,
C, antes do D e do M.
Deste modo,
IV passou a representar o número 5 - 1 = 4
IX passou a representar o número 10 - 1 = 9
XL passou a representar o número 50 - 10 = 40
XC passou a representar o número 100 - 10 = 90
CD passou a representar o número 500 -100 = 400
CM passou a representar o número 1000 - 100 = 900
ficando permitido escrever
MMCMIX= 2 909
CLXXXVII = 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 187
MDCXXVI = 1000 + 500 + 100 + 10 + 10 + 5 + 1 = 1626.
Utilizavam-se também de outra regra: quando se colocava um traço em cima de algarismo(s) indicava-se que este(s) deveria(m) ser multiplicado(s) por 1 000.

Observação: Os Romanos foram um povo que, em poucos séculos, atingiu um nível técnico muito alto, e conservou assim, curiosamente, durante toda a sua existência, um sistema inutilmente complicado e não operatório, o que denota um arcaísmo no pensamento. Embora, ainda hoje, os algarismos romanos são usados na escrita dos séculos, na indicação de capítulos de livros, nos mostradores do relógio etc.

**Incas (300 dC.- 1600 d. C.)**

O Sistema de numeração dos Incas era o decimal, diferente do vigesimal utilizados pelos Maias e Astecas. Esta particularidade facilitava o registro e as operações numéricas. No estudo da matemática inca, existem dois aspectos a serem considerados: a representação de números por meio de nós (laços) nos quipus e a representação de palavras por meio de números. Embora estejam relacionados, estes dois aspectos são distintos.

Nos quipus cada nó nos cordões tinha a mesma função, mas com significado variados. Assim, um nó simples indicava o algarismo um. Nós cada vez mais grossos figuravam os algarismos de dois a nove. O conceito de zero era conhecido e estava subtendido nas operações numéricas. Alguns historiadores (Faria, Berutti e Marques, 1998: 109) chegam a declarara que os espaços vazios entre os nós dos quipus representava o zero.
De acordo com a posição do nó na parte inferior, mediana ou superior dos cordões verticais, os algarismos que eles representavam eqüivalia a dezena, centena e milhar.

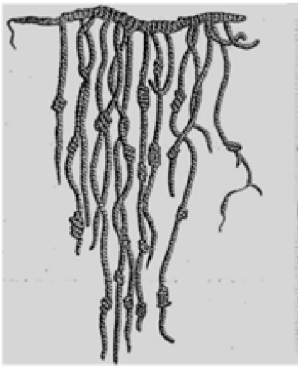
As palavras, em Quechua, que designam cada um dos algarismos de 1 a 10, constituem uma lista básica de palavras-número, que serão usadas na composição de palavras-número mais complexas.
1- juk
2- iskai
3- kimsa
4- tawa
5- pichqa
6- soqta
7- qanchis
8- pusaq
9- isqon
10- chunca

As palavras-número mais complexas apresentaram a seguinte forma: [multiplicador] {núcleo} (adicionador), sendo o núcleo composto por uma base decimal, chunca - 10, pachak - 100 e waranqa - 1000.
Exemplos:
qanchis chunca pichqa
[7] {10} (5) = 705
kimsa pachak tawa chunca qanchis waranqa iskai
[[3] {100} ([4] {10} (7))] {1000} (2) = 347,002

Observou-se que um quipu tem uma corda que é mais grossa que as demais, denominada corda principal e da qual estão suspensas outras cordas. Quando se estende a corda principal sobre uma superfície plana, a maioria das cordas direcionam-se para baixo, estas denominam-se cordas pendentes. Às vezes, algumas das cordas suspensas direcionam-se para cima e por isso denominam-se cordas superiores. Suspensas de algumas ou de todas as cordas pendentes ou superiores existem outras cordas denominadas subsidiárias. Estas podem conter cordas suspensas delas, de maneira que podem haver subsidiárias de subsidiárias e assim por diante. Um tipo especial de corda pode ser conectada ao final da corda principal e por esse motivo recebe o nome de pendente final. Quanto aos nós, observou-se três tipos: simples, que representam a base decimal, alongados, que representam dígitos entre 2 e 9 e, nós em formato oito, que representam o número 1. O conceito de zero era subentendido.

| NUMERAL | NUMERO | LETRAS | FIGURA GEOMÉTRICA |
|---|---|---|---|
| 1 | JUK | J | |
| 2 | ISKAI | LL-W-Y | |
| 3 | KIMSA | M | |
| 4 | TAWA | T | |
| 5 | PICHQA | R | |
| 6 | SOQTA | S | |
| 7 | QANCHIS | K-Q | |
| 8 | PUSAQ | P | |
| 9 | ISQON | N-Ñ | |
| 10 | CHUNCA | CH | |

A partir da lista básica de palavras-número, formadas a partir do alfabeto Runa Simi (Tabela 1), pôde-se observar a relação entre os números e as consoantes na formação de mensagens, como, por exemplo, Rimaisi masi, do Quechua, que pode ser traduzido como aquele que ajuda a falar mais. Para a construção desta mensagem usou-se a sequência numérica: 5, 3, 6, 3, 6, que equivale, respectivamente, à sequência de consoantes: r, m, s, m, s. Os primeiros quipus eram brancos mas devido à grande quantidade de informações, tornou-se necessário acrescentar novas cores para diferenciá-las. Um quipu, pode, então, ser entendido como uma reunião de cordas de diversas cores, com nós dispostos em espaços regulares (FIGURA 1). O espaçamento de um nó, relativo a outro, indica a diferença de valores entre eles. A cor das cordas é fator muito importante, pois cores diferentes podem representar diferentes tipos de dados, esta notação pelas cores assemelha-se à notação matemática de variáveis reais representadas por letras. Num quipu, as cordas podem ser agrupadas por cores, por blocos espaçados ou por blocos de cores espaçados. Outro modo de organizar um quipu consiste em utilizar o conceito matemático conhecido por estrutura de árvore.

A figura à esquerda representa o diagrama de um quipu. Na figura do meio, um índio segura o quipu e na parte inferior mostra uma representação da yupana. Na direita temos uma yupana.

Yupana, também conhecida como "Inca abacus", era um instrumento usado para calculos matemáticos onde para aguns historiadores geram muitas controversias quanto a forma que era utilizados. Este instrumento que era fabricade de pedra ou argila, armários ou compartimentos que estavam relacionados com decimais e unidades onde eram identificados com a utilisaçao de pequenas pedras ou grãos de milho ou quinoa.

Um engenheiro aeronáutico italiano assegura haver descoberto o sistema de calculo dos incas, um enigma de 500 anos. O que logrou quase brincando, trás haver decifrado a yupana, o ábaco com o que efetuavam contas. As yupanas tinham diferentes formas e disposição do esculpido; eram feitos de pedra, barro, madeira, osso ou pintado em cerâmica esplêndida, são decoradas com motivo que faz um pensar as existências de vários tipos, que podem ser atribuídos a diferentes regiões incas.De Pasquale descobriu que os incas realizavam seus cálculos na base do numero 40 e não na base decimal, como se acreditava até agora, segundo uma teses que nunca chegou a provar-se. Segundo o engenheiro, o erro parte dos quipus, instrumentos realizados com linhas trançados e nós (em quéchua, quipu quer dizer, precisamente, nó), que os incas usavam para os registros contábeis e cronológicos; cada corda tinha nove nós, motivo pelo qual se supunha que usavam o sistema decimal.

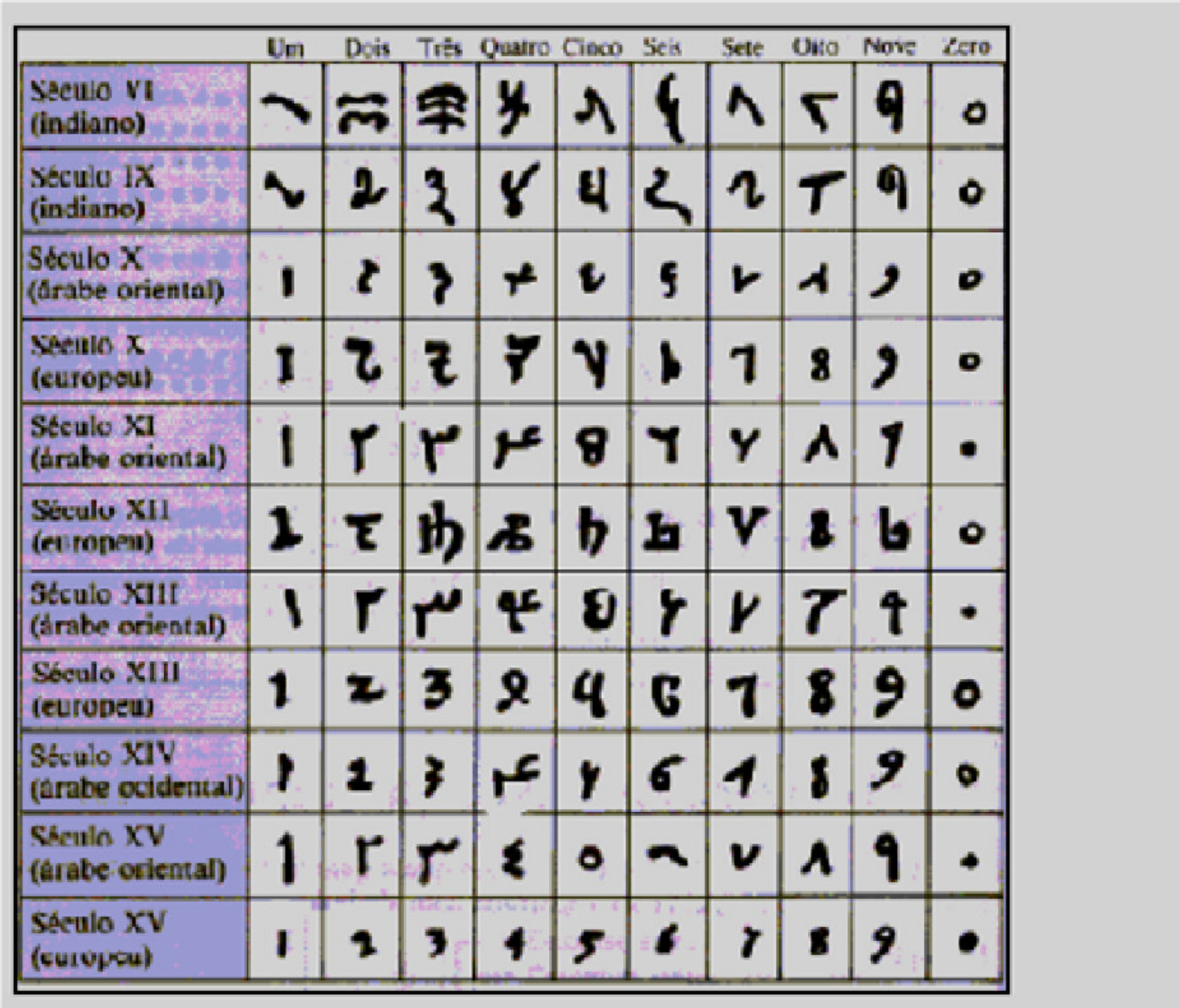
A yupana, que em quéchua significa contar ou contador era a "calculadora" dos incas. Consiste em um pequeno bloco de pedra de unos 20 x 30 centímetros, com cavidades dispostas em cinco franjas horizontais e um número variável de colunas, onde se colocavam sementes ou pedrinhas. Segundo De Pasquale, os cálculos se realizavam de direita à esquerda.

Na primeira cavidade da fila inferior se colocava uma semente que tinha valor 1; na segunda, duas sementes de valor 2; na terceira, três sementes de valor 3; na seguinte, cinco de valor 5; e na quinta, oito de valor 8. Somadas todas as sementes, seu valor era igual a 39. Os incas não utilizavam o zero.

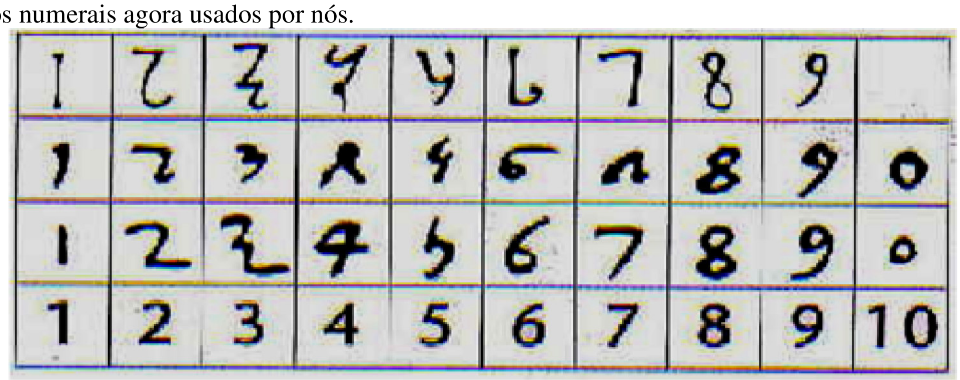
"O sistema esta baseado na chamada 'serie de Fibonacci', uma escala que começa por 1 e segue por 2, 3, 5, 8, etc., e onde cada número se faz somando os dois anteriores a explicação De Pasquale é. Esta sucessão se encontra na natureza: nos rombos dos abacaxis, dos pinos, nas pétalas das margaridas, no mesmo DNA".

**Sistema Numérico Indo-Arábico (250 a.C.- 700 d.C.)**

Nosso sistema de numeração surgiu na Ásia, no Vale do rio Indo, onde hoje é o Paquistão. Inicialmente utilizavam somente os algarismos de 1 à 9. Em relação à origem do zero, é possível que o mais antigo símbolo hindu tenha sido o ponto negrito, que aparece no manuscrito Bakhshali, cujo conteúdo talvez remonte do século III ou IV d.C. Em 825 d.C., um matemático persa chamado Al−Khowârizmî publicou o sistema de numeração decimal que usamos hoje em dia. Este sistema é chamado indo−arábico e tem esse nome devido aos hindus, que o inventaram, e aos árabes, que por serem grandes mercadores e utilizarem a simbologia hindu, o difundiram para a Europa Ocidental. Durante séculos, estes símbolos sofreram muitas modificações, em sua grafia pelos hindus, árabes e europeus, até que se estabilizassem. Tabela 6.1 : Extraído de [3]. Observações: ¨ Em certas classes de mercadores encontramos até os dias atuais a decidida preferência pela base doze (dúzia), pois o número 12 tem mais divisores que o número 10.




Foi há cerca de 2000 anos que os Hindus (no Norte da índia) começaram a usar símbolos numéricos que deram origem aos numerais agora usados por nós.




Na primeira linha da imagem, numerais de há 1000 anos. Na segunda, há 800 anos. Na terceira, há 600 anos. Na última, numeração actual. Nas suas relações comerciais com os árabes, os Hindus terão usado esses sinais numéricos, que os árabes adoptaram e espalharam pelo mundo, chegando à Europa.

Contudo, no início, este sistema ainda não era perfeito. Efectuavam cálculos facilmente, mas não tinham símbolo para designar o zero. Por exemplo, o número 507 era representado por 5  7, ficando um espaço entre o 5 e o 7 que correspondia ao"nada" das dezenas. Só há cerca de 800 anos é que os Hindus, além dos símbolos dos números, tiveram também o mérito genial de inventar o zero. Vários antropólogos procuraram explicar como pode ter surgido esta ideia do nada, tão importante para a Matemática. Uma das explicações mais interessantes parece ser a que liga o conceito do zero à ideia de "nada", bem expressa no misticismo religioso Hindu pelo chamado Nirvana.

**Números em diferentes bases.**

Como vimos cada povo adotou uma base e, a partir daí, construiu seu sistema de numeração. Prevaleceu a base decimal por sua praticidade. Nesta base, qualquer número é representado com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. As outras bases porém, não foram totalmente excluídas do nosso dia-a-dia.

A base binária é de grande importância para a ciência, pois permite fazer operações lógicas e aritméticas usando-se apenas dois dígitos ou dois estados (sim e não, falso e verdadeiro, tudo ou nada, 1 ou 0, ligado e desligado). Grande parte dos circuitos eletrônicos funciona com esta base. Os robôs que operam com interruptores elétricos contam apenas com dois números: 1 para "ligado" e 0 para "desligado". Os computadores trabalham internamente com dois níveis de tensão, recebem instruções com diferentes bases que não as decimais: além da base 2, se utilizam as bases 8 e 16.

O programador monta o programa na linguagem habitual e o chip interpreta e converte este programa para a linguagem computacional. Os programas de computadores são codificados sob forma binária e armazenados nas mídias (memórias, discos, etc) sob esse formato. Os dígitos binários são habitualmente chamados de bit. Um número binário formado por 8 bits é designado por byte, 16 bits é uma "Word", 32 bits é uma "Double Word".

É importante, portanto, que saibamos como passar um número da base usual 10 para uma outra base.

Nesta seção trabalha-se com os comandos para a mudanças de bases.

```
> restart;
> convert(8253,binary); # converte um número da base decimal para a binária
```
10000000111101
```
> convert(8253,base,20);# é igual a 13+12*(100)+0*(400)+1*(8000). # converte um número da base decimal para a binária
```
[13, 12, 0, 1]
```
> convert(8253,base,10);
```
[3, 5, 2, 8]
```
> convert(8253,roman);#converter decimal para números romanos.
```
"MMMMMMMMCCLIII"
```
> convert(XCI,arabic);#converter numero romano para numero indo-arabico
```
91
```
> convert(110,decimal,binary);#converte base binaria para decimal.
```
6
```
> convert(2253,decimal,octal); #converte da base octal para decimal.
```
1195

exemplo: Converter o numero 2253 na base 8 para a base bibaria.

```
> convert(2253,decimal,octal); #converte da base octal para decimal.
```
1195
```
> convert(%,binary); # converte o último número (saida) em binário.
```
10010101001010011000000101000010011
```
> convert([3,5,2,2],base,8,2);
```
[1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1]

Converter 789 da base 16 para base 7.

```
> convert(789,base,16,7);
Error, (in convert/base) invalid arguments
```

Exercício: Converter 8253 da base 10 para base 16.

## Conjuntos

Nesta seção trabalharemos com os comandos para realizar as operações com conjuntos.
A notação dos conjuntos é a mesma.

Exemplos:

A={2, a, 4} e B= {c, d, 2}
AUB={a, c, d, 2, 4}
A-B={a, 4}
B-A{c, d}

```
> restart;
> A:={2,a,4};B:={c,d,2};
```
$$A := \{2, 4, a\}$$
$$B := \{2, c, d\}$$

```
> AuB:=A union B;
```
$$AuB := \{2, 4, c, d, a\}$$
```
> AnB:=A intersect B;# AnB é A interseção B.
```
$$AnB := \{2\}$$
```
> A\B:=A minus B;
```
$$AB := \{4, a\}$$
```
> AsB:=AuB minus AnB; #Diferença simétrica.
```
$$AsB := \{4, c, d, a\}$$
```
> a in A;
```
$$a \in \{2, 4, a\}$$
```
> evalb(%);# true
```
$$true$$
```
> evalb(a in A);
```
$$true$$
```
> evalb(A subset B);
```
$$false$$
```
> nops(A);# indica a cardinalidade do conjunto.
```
$$3$$
```
> nops(AuB);
```
$$5$$

Exercícios: Faça as operações abaixo:
```
> C:={pedras, cordas, alpha, barras};
```
$$C := \{\alpha, barras, cordas, pedras\}$$
```
> E:={alpha, beta, I, I+1, V};
```
$$E := \{\mathrm{I}, \alpha, V, 1+\mathrm{I}, \beta\}$$
```
> F:={pedras, cordas, alpha, beta, gamma, barras};
```
$$F := \{\gamma, \alpha, barras, cordas, pedras, \beta\}$$
```
>  C union E union F;# Qual o conjunto: CuEuF?
```
$$\{\gamma, \mathrm{I}, \alpha, barras, V, cordas, pedras, 1+\mathrm{I}, \beta\}$$
```
> C minus F; #Qual a diferença entre os conjuntos C e F?
```
$$\{\ \}$$
```
> nops(E); # Qual a cardinalidade do conjunto E??
```
$$5$$
```
> EuF:= E union F;# Qual o conjunto EuF?
```
$$EuF := \{\gamma, \mathrm{I}, \alpha, barras, V, cordas, pedras, 1+\mathrm{I}, \beta\}$$
```
> EnF:= E intersect F;#Qual o conjunto EnF?
```
$$EnF := \{\alpha, \beta\}$$
```
> EsF:= EuF minus EnF; #Qual a diferença simétrica entre E e F?
```
$$EsF := \{\gamma, \mathrm{I}, barras, V, cordas, pedras, 1+\mathrm{I}\}$$
```
> evalb(F subset C); # F está contido em C?
```
$$false$$
```
> evalb(C subset F);# C está contido em F?
```
$$true$$
```
> {1, 2, 3} union C; # Qual o conjunto resultante de {1, 2, 3} união com C?
```
$$\{1, 2, 3, \alpha, barras, cordas, pedras\}$$
```
> AuC:= A union C;
```
$$AuC := \{2, 4, \alpha, barras, cordas, a, pedras\}$$

```
> AnC:= A intersect C;
```
$$AnC := \{\ \}$$

```
> AsC:= AuC minus AnC; #Qual a diferença simétrica entre A e C?
```
$$AsC := \{2, 4, \alpha, barras, cordas, a, pedras\}$$

```
> (C intersect F) union E; # Qual o conjunto (Cnf)uF?
```
$$\{\mathrm{I}, \alpha, barras, V, cordas, pedras, 1+\mathrm{I}, \beta\}$$

```
> evalb(2 in F);# 2 pertence ao conjunto F?
```
$$false$$

```
> evalb(F in C);# Falso pois, a relação de pertinencia não é válida entre conjuntos.
```
$$false$$

**Conjuntos Especiais**

Conjunto Vazio: É um conjunto que não possui elementos. É representado por { } ou por Ø. O conjunto vazio está contido em todos os conjuntos.

Conjunto Unitário: É um conjunto que contém apenas um elemento.

```
> vazio:={};
```
$$vazio := \{\ \}$$

```
> unitario:={x};
```
$$unitario := \{x\}$$

```
> vogais:={a, e, i, o, u};
```
$$vogais := \{e, i, u, o, a\}$$

```
> N1:= {$0..100};# Subconjunto dos números naturais.
```
$N1 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$

```
> N:={$0..infinity};# Conjunto dos números inteiros.
```
$$N := \{`\$`(0..\infty)\}$$

```
> Z1:={$-100..100};# subconjunto dos números inteiros.
```
$Z1 := \{-100, -99, -98, -97, -96, -95, -94, -93, -92, -91, -90, -89, -88, -87, -86, -85, -84, -83, -82, -81, -80, -79, -78, -77, -76, -75, -74, -73, -72, -71, -70, -69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58, -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$

```
> z:= {-infinity..infinity};# Conjunto dos números inteiros.
```
$$z := \{-\infty..\infty\}$$

```
> Q:= {p/q, talque, p in Z, q in Z, q<>0};
```
$$Q := \left\{talque, \frac{p}{q}, p \in Z, q \in Z, q \neq 0\right\}$$

```
> Ir:={irracionais};
```
$$Ir := \{irracionais\}$$

```
> R:={reais};
```
$$R := \{reais\}$$

## Conjunto dos Números Naturais

O conjunto dos números naturais é representado pela letra maiúscula N e estes números são construídos com os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que também são conhecidos como algarismos indo-arábicos. No século VII, os árabes invadiram a Índia, difundindo o seu sistema numérico.
Veremos alguns subconjuntos dos Números Naturais: * Pares; * Ímpares; * Primos; * Amigos, * Perfeitos, * Figurados (triangulares, quadrangular, pentagonais); * Divisores; * Decomposição; * MMC; * MDC; * Somatórios; * Produtorias.

```
> ithprime(1);# 1° número primo
```
2

```
> ithprime(2);
```
3

```
> ithprime(3);
```
5

```
> P1:{seq(2*n,n=0..200)};# pares
```
{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100, 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 130, 132, 134, 136, 138, 140, 142, 144, 146, 148, 150, 152, 154, 156, 158, 160, 162, 164, 166, 168, 170, 172, 174, 176, 178, 180, 182, 184, 186, 188, 190, 192, 194, 196, 198, 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216, 218, 220, 222, 224, 226, 228, 230, 232, 234, 236, 238, 240, 242, 244, 246, 248, 250, 252, 254, 256, 258, 260, 262, 264, 266, 268, 270, 272, 274, 276, 278, 280, 282, 284, 286, 288, 290, 292, 294, 296, 298, 300, 302, 304, 306, 308, 310, 312, 314, 316, 318, 320, 322, 324, 326, 328, 330, 332, 334, 336, 338, 340, 342, 344, 346, 348, 350, 352, 354, 356, 358, 360, 362, 364, 366, 368, 370, 372, 374, 376, 378, 380, 382, 384, 386, 388, 390, 392, 394, 396, 398, 400}

```
> I1:{seq(2*n+1,n=0..200)};
```
{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237, 239, 241, 243, 245, 247, 249, 251, 253, 255, 257, 259, 261, 263, 265, 267, 269, 271, 273, 275, 277, 279, 281, 283, 285, 287, 289, 291, 293, 295, 297, 299, 301, 303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 325, 327, 329, 331, 333, 335, 337, 339, 341, 343, 345, 347, 349, 351, 353, 355, 357, 359, 361, 363, 365, 367, 369, 371, 373, 375, 377, 379, 381, 383, 385, 387, 389, 391, 393, 395, 397, 399, 401}

```
> I1:{seq(2*n+1,n=0..100)};# ímpares
```
{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201}

```
> P1:{seq(2*n,n=0..50)};# pares
```
{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100}

```
> primos:={seq(ithprime(K),K=1..100)};
```
*primos* := {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223,

227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541 }

```
> evalb(6 in primos);# 6 pertence aos primos ?
```

*false*

No Maple existem comandos para decompor um número como produto de potências de números primos, para isto precisamos chamar o pacote:

```
> with(numtheory);# teoria dos números
```

[*GIgcd*, *bigomega*, *cfrac*, *cfracpol*, *cyclotomic*, *divisors*, *factorEQ*, *factorset*, *fermat*, *imagunit*, *index*, *integral_basis*, *invcfrac*, *invphi*, *issqrfree*, *jacobi*, *kronecker*, λ, *legendre*, *mcombine*, *mersenne*, *migcdex*, *minkowski*, *mipolys*, *mlog*, *mobius*, *mroot*, *msqrt*, *nearestp*, *nthconver*, *nthdenom*, *nthnumer*, *nthpow*, *order*, *pdexpand*, φ, π, *pprimroot*, *primroot*, *quadres*, *rootsunity*, *safeprime*, σ, *sq2factor*, *sum2sqr*, τ, *thue*]

```
> F6:=ifactor(6);# decompõe
```

$$F6 := (2)\ (3)$$

```
> ifactor(150);
```

$$(2)\ (3)\ (5)^2$$

```
> D6:=divisors(6);
```

$$D6 := \{1, 2, 3, 6\}$$

```
> nops(D6);# números de divisores
```

4

```
> sigma(6);# soma de todos os divisores
```

12

```
> tau(6);# números de divisores
```

4

```
> evalb(129 in primos);# 1ª forma
```

*false*

```
> D129:=divisors(129);
```

$$D129 := \{1, 3, 43, 129\}$$

```
> D127:=divisors(127);
```

$$D127 := \{1, 127\}$$

```
> evalb(127 in primos);
```

*true*

```
> primos:={seq(ithprime(K),K=168..500)}; # outra forma de visualizar os
  números primos de 4 casas.
```

*primos* := {997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393, 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657, 2659, 2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693, 2699, 2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, 2741, 2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791, 2797, 2801, 2803, 2819, 2833, 2837, 2843, 2851, 2857, 2861, 2879, 2887, 2897, 2903, 2909, 2917, 2927, 2939, 2953, 2957, 2963, 2969, 2971, 2999, 3001, 3011, 3019, 3023, 3037, 3041, 3049, 3061, 3067, 3079, 3083, 3089, 3109, 3119, 3121, 3137, 3163, 3167, 3169, 3181, 3187, 3191, 3203, 3209, 3217, 3221, 3229, 3251, 3253, 3257, 3259, 3271, 3299, 3301, 3307, 3313, 3319, 3323, 3329, 3331, 3343, 3347, 3359, 3361, 3371, 3373, 3389, 3391, 3407, 3413, 3433, 3449, 3457, 3461, 3463, 3467, 3469, 3491, 3499, 3511, 3517, 3527, 3529, 3533, 3539, 3541, 3547, 3557, 3559, 3571}

```
> evalb(1871 in primos);
```

*true*

```
> ifactor(1871);# só aparece um porque é primo
```

$$(1871)$$

```
> ifactor(2);
```

$$(2)$$

```
> ifactor(500);# não é primo
```

$$(2)^2 (5)^3$$

```
> ifactor(4573);# não é primo
```

$$(17) (269)$$

**MMC e MDC**

O Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de dois ou mais números naturais é o menor múltiplo comum a esses números que é diferente de zero.
Vamos calcular o MMC dos números 6 e 8 por exemplo:

```
> M6:={seq(6*k,k=1..100)};
```

*M6* := {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102, 108, 114, 120, 126, 132, 138, 144, 150, 156, 162, 168, 174, 180, 186, 192, 198, 204, 210, 216, 222, 228, 234, 240, 246, 252, 258, 264, 270, 276, 282, 288, 294, 300, 306, 312, 318, 324, 330, 336, 342, 348, 354, 360, 366, 372, 378, 384, 390, 396, 402, 408, 414, 420, 426, 432, 438, 444, 450, 456, 462, 468, 474, 480, 486, 492, 498, 504, 510, 516, 522, 528, 534, 540, 546, 552, 558, 564, 570, 576, 582, 588, 594, 600}

```
> M8:={seq(8*k,k=1..100)};
```

*M8* := {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144, 152, 160, 168, 176, 184, 192, 200, 208, 216, 224, 232, 240, 248, 256, 264, 272, 280, 288, 296, 304, 312, 320, 328, 336, 344, 352, 360, 368, 376, 384, 392, 400, 408, 416, 424, 432, 440, 448, 456, 464, 472, 480, 488, 496, 504, 512, 520, 528, 536, 544, 552, 560, 568, 576, 584, 592, 600, 608, 616, 624, 632, 640, 648, 656, 664, 672, 680, 688, 696, 704, 712, 720, 728, 736, 744, 752, 760, 768, 776, 784, 792, 800}

```
> M6 intersect M8;# O 1° número que aparece é o MMC.
```

{24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, 240, 264, 288, 312, 336, 360, 384, 408, 432, 456, 480, 504, 528, 552, 576, 600}

```
> lcm(6,8);
```

$$24$$

```
> lcm(8,50,80);
```

$$400$$

```
> lcm(7,14,81,490);
```

$$39690$$

```
> gcd(6,8);# MDC(6,8)=2
```

$$2$$

```
> gcd(483,504);
```

$$21$$

```
> gcd(8,50,16):# No maple, não é possível calcular o MMC de três números.
Error, invalid input: gcd expects its 3rd argument, cofa, to be of type
name, but received 16
```

```
> gcd(gcd(8,50),16);
```

$$2$$

```
> gcd(gcd(80,172),gcd(400,1000));
```

$$4$$

```
> lcm(6,24,42);# Calcula o mmc de um número finito de números.
```

$$168$$

```
> lcm(a,a*b);
```

$$a\,b$$

```
> ilcm(a,a*b);
```

$$\mathit{ilcm}(a, a\,b)$$

```
> gcd(a,a*b);# Calcula um número par de números.
```

$$a$$

```
> igcd(a,a*b);#Calcula o mdc de um número finito de números.
```

$$\mathit{igcd}(a, a\,b)$$

```
> ilcm(6,24,42);
```

$$168$$

```
> igcd(6,24,42);
```

$$6$$

```
> igcd(6,24,42,50);
```

$$2$$

**Números Amigos**

Dizemos que p e q são números amigos se a soma dos divisores de p, menos p dá q ou a soma dos divisores de q menos q dá p. Ou seja, n e m são amigos se m=sigma(n)-n e n=sigma(m)-m .

```
> sigmax;# Esse comando soma todos os divisores do número x.
```

$$\mathit{sigmax}$$

```
> divisors(220);
```

$$\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220\}$$

```
> divisors(284);
```

$$\{1, 2, 4, 71, 142, 284\}$$

```
> sigma(220);
```

$$504$$

```
> sigma(284);
```

$$504$$

Portanto esses números são amigos.

```
> sigma(6);
```

$$12$$

```
> sigma(6)-6;# é número egoísta
```

$$6$$

```
> amigop:=sigma(p)-p;
```

$$\mathit{amigop} := \mathit{numtheory\text{:-}sigma}(p) - p$$

```
> amigoq:=sigma(q)-q;
```

$$\mathit{amigoq} := \mathit{numtheory\text{:-}sigma}(q) - q$$

Veja o seguinte exemplo podemos verificar para p=220 e q=284.

```
> amigo220:=sigma(220)-220;
```

$$\mathit{amigo220} := 284$$

```
> amigo284:=sigma(284)-284;
```

$$amigo284 := 220$$

```
> amigo2620:=sigma(2620)-2620;
```

$$amigo2620 := 2924$$

```
> amigo2924:=sigma(2924)-2924;
```

$$amigo2924 := 2620$$

```
> amigo28:=sigma(28)-28;# 28 é amigo dele mesmo, e, portanto, é conhecido como número egoísta ou número perfeito.ver cor 7 no fim
```

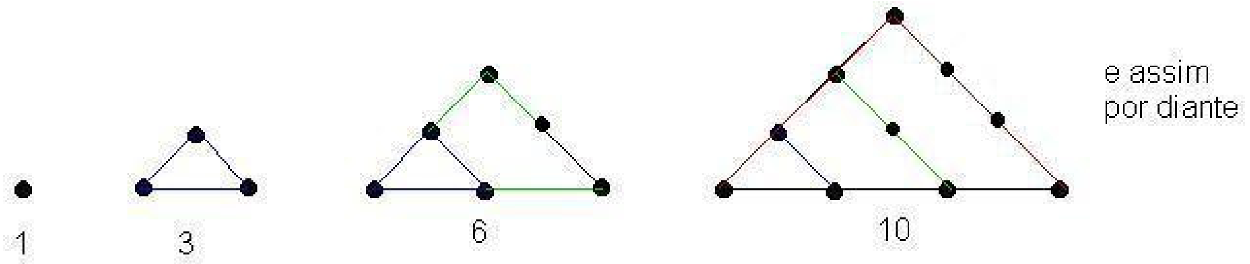
$$amigo28 := 28$$

## Números Figurados

### História

### Números Triangulares

T(n)= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + (...) + n




```
> sum(k,k=1..n);# Determina a soma todos os termos de um até n.
```

$$\frac{1}{2}\,(n+1)^2 - \frac{1}{2}\,n - \frac{1}{2}$$

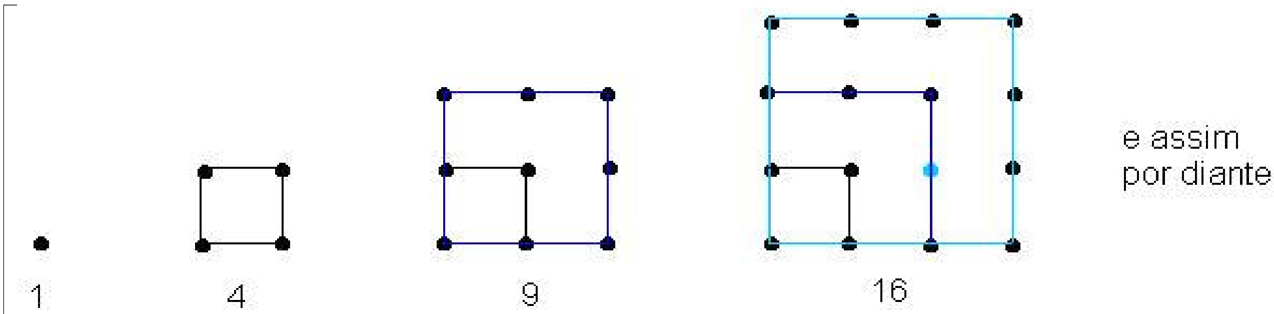
```
> Sum(k,k=1..n);# Só escreve a notação.
```

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

```
> triangulares:={seq(k*(k+1)/2,k=1..50)};
```

*triangulares* := { 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666, 703, 741, 780, 820, 861, 903, 946, 990, 1035, 1081, 1128, 1176, 1225, 1275 }

### Números Quadrados




```
> quangulares:={seq(k^2,k=1..50)};
```

*quangulares* := { 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500 }

```
> Q(n)=2*T(n-1)+n;2
```

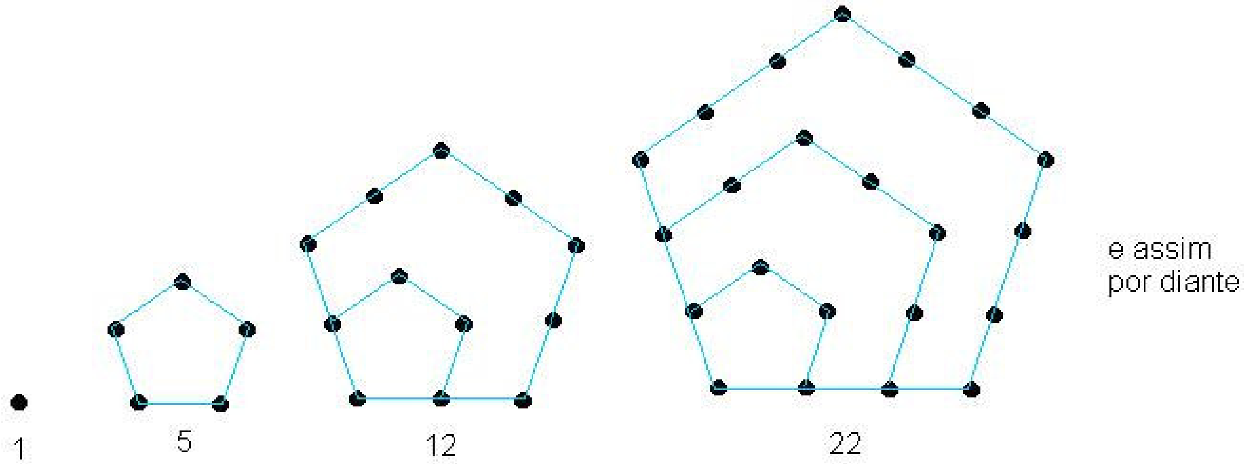
$$\left\{ \frac{p(n)}{q(n)}, talque(n), p \in Z(n), q \in Z(n), (q \neq 0)(n) \right\} = 2\,T(n-1) + n$$

```
Warning, inserted missing semicolon at end of statement
```

$$2$$

## Números Pentagonais

P(n)= 1+4+7+10+...+...




```
> p(n)=3*T(n)-2*n;
```

$$p(n) = 3\,T(n) - 2\,n$$

```
> p(n)=(3*n^2-n)/2;
```

$$p(n) = \frac{3}{2}\,n^2 - \frac{1}{2}\,n$$

```
> pentagonais:={seq(k*(3*k-1)/2,k=1..50)};
```

*pentagonais* := {1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425, 477, 532, 590, 651, 715, 782, 852, 925, 1001, 1080, 1162, 1247, 1335, 1426, 1520, 1617, 1717, 1820, 1926, 2035, 2147, 2262, 2380, 2501, 2625, 2752, 2882, 3015, 3151, 3290, 3432, 3577, 3725}

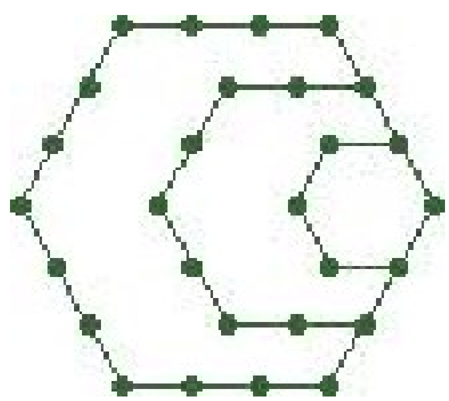
```
> p(n):=Sum(3*k-2,k=1..n);
```

$$p(n) := \sum_{k=1}^{n} (3\,k-2)$$

```
> p(n):=sum(3*k-2,k=1..n);
```

$$p(n) := \frac{3}{2}\,(n+1)^2 - \frac{7}{2}\,n - \frac{3}{2}$$

## Números Hexagonais



```
> h(n):=sum(4*k-3,k=1..n);
```

$$h(n) := 2\,(n+1)^2 - 5\,n - 2$$

```
> factor(%);
```

$$n\,(2\,n-1)$$

```
> hexagonais:=(seq(k*(2*k-1),k=1..50));
```

*hexagonais* := 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325, 378, 435, 496, 561, 630, 703, 780, 861, 946, 1035, 1128, 1225, 1326, 1431, 1540, 1653, 1770, 1891, 2016, 2145, 2278, 2415, 2556, 2701, 2850, 3003, 3160, 3321, 3486, 3655, 3828, 4005, 4186, 4371, 4560, 4753, 4950

## Conjunto dos Números Inteiros

Z={...,-2,-1,0,1,2,...}

Na época do Renascimento, os matemáticos sentiram cada vez mais a necessidade de um novo tipo de número, que pudesse ser a solução de equações tão simples como:

$$x + 2 = 0,\ 2x + 10 = 0,\ 4y + 4 = 0$$

As Ciências precisavam de símbolos para representar temperaturas acima e abaixo de 0º C, por exemplo. Astrônomos e físicos procuravam uma linguagem matemática para expressar a atração entre dois corpos.

A idéia sobre os sinais vem dos comerciantes da época. Os matemáticos encontraram a melhor notação para expressar esse novo tipo de número.

Com essa nova notação,os matemáticos poderiam, não somente indicar as quantidades, mas também representar o ganho ou a perda dessas quantidades, através de números, com sinal positivo ou negativo

A idéia sobre os sinais vem dos comerciantes da época. Os matemáticos encontraram a melhor notação para expressar esse novo tipo de número.

Com essa nova notação,os matemáticos poderiam, não somente indicar as quantidades, mas também representar o ganho ou a perda dessas quantidades, através de números, com sinal positivo ou negativo

Definimos o conjunto dos números inteiros como a reunião do conjunto dos números naturais, o conjunto dos opostos dos números naturais e o zero. Este conjunto é denotado pela letra Z (Zahlen=número em alemão). Este conjunto pode ser escrito por:

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...\}$$

Exemplos de subconjuntos do conjunto Z

(a) Conjunto dos números inteiros excluído o número zero:

$$Z^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4,...\}$$

(b) Conjunto dos números inteiros não negativos:

$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

(c) Conjunto dos números inteiros não positivos:

$Z_- = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}$

Observação: Não existe padronização para estas notações.

## Reta Numerada

Uma forma de representar geometricamente o conjunto Z é construir uma reta numerada, considerar o número 0 como a origem e o número 1 em algum lugar, tomar a unidade de medida como a distância entre 0 e 1 e por os números inteiros da seguinte maneira:


Ao observar a reta numerada notamos que a ordem que os números inteiros obedecem é crescente da esquerda para a direita, razão pela qual indicamos com uma seta para a direita. Esta consideração é adotada por convenção, o que nos permite pensar que se fosse adotada outra forma, não haveria qualquer problema

```
> Z:={-infinity..infinity};
```

$$Z := \{-\infty..\infty\}$$

```
> 2 in Z;evalb(%);# A afirmação é verdadeira, mas o programa se confunde, pois são muitos números no conjunto Z e o maple não compreende.
```

$$2 \in \{-\infty..\infty\}$$

$$false$$

A seguir alguns subconjuntos de números inteiros

```
> Z1:={seq(k,k=-100..100)};
```

*Z1* := { -100, -99, -98, -97, -96, -95, -94, -93, -92, -91, -90, -89, -88, -87, -86, -85, -84, -83, -82, -81, -80, -79, -78, -77, -76, -75, -74, -73, -72, -71, -70, -69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58, -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100 }

```
> -2 in Z1;evalb(%);
```

$-2 \in \{-100, -99, -98, -97, -96, -95, -94, -93, -92, -91, -90, -89, -88, -87, -86, -85, -84, -83, -82, -81, -80, -79, -78, -77, -76, -75, -74, -73, -72, -71, -70, -69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58, -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$

*true*

Z+={0,1,2,...};#Números inteiros não negativos.
Z-={...,-4,-3,-2,-1,0}
Z*={...,-2,-1,1,2,3,...}=Z-{0}

```
> Zp:={seq(k,k=0..100)};
```

$Zp := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$

```
> Zn:={seq(-k,k=0..100)};
```

$Zn := \{-100, -99, -98, -97, -96, -95, -94, -93, -92, -91, -90, -89, -88, -87, -86, -85, -84, -83, -82, -81, -80, -79, -78, -77, -76, -75, -74, -73, -72, -71, -70, -69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58, -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

```
> Z_0:=(Zp union Zn) minus {0};
```

$Z\_0 := \{-100, -99, -98, -97, -96, -95, -94, -93, -92, -91, -90, -89, -88, -87, -86, -85, -84, -83, -82, -81, -80, -79, -78, -77, -76, -75, -74, -73, -72, -71, -70, -69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58, -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$

```
> Z_0:={seq(k,k=1..100)} union {seq(-k,k=1..100)};
```

$Z\_0 := \{-100, -99, -98, -97, -96, -95, -94, -93, -92, -91, -90, -89, -88, -87, -86, -85, -84, -83, -82, -81, -80, -79, -78, -77, -76, -75, -74, -73, -72, -71, -70, -69, -68, -67, -66, -65, -64, -63, -62, -61, -60, -59, -58, -57, -56, -55, -54, -53, -52, -51, -50, -49, -48, -47, -46, -45, -44, -43, -42, -41, -40, -39, -38, -37, -36, -35, -34, -33, -32, -31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21, -20, -19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$

```
> M(2):={seq(2*k,k=0..100)};
```

$M(2) := \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100, 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 130, 132, 134, 136, 138, 140, 142, 144, 146, 148, 150, 152, 154, 156, 158, 160, 162, 164, 166, 168, 170, 172, 174, 176, 178, 180, 182, 184, 186, 188, 190, 192,$

194, 196, 198, 200}

```
> With(numbertheory);
```

$$With(numbertheory)$$

```
> divisors(-2);
```

$$\{1, 2\}$$

```
> A:=divisors(2);
```

$$A := \{1, 2\}$$

```
> B:={seq(-k,k=divisors(2))};
```

$$B := \{-2, -1\}$$

```
> D(2):=A union B;
```

$$\mathrm{D}(2) := \{-2, -1, 1, 2\}$$

```
> ?mod
> M(-7):={seq(7*k,k=-100..100)};
```

$M(-7) :=$ { -700, -693, -686, -679, -672, -665, -658, -651, -644, -637, -630, -623, -616, -609, -602, -595, -588, -581, -574, -567, -560, -553, -546, -539, -532, -525, -518, -511, -504, -497, -490, -483, -476, -469, -462, -455, -448, -441, -434, -427, -420, -413, -406, -399, -392, -385, -378, -371, -364, -357, -350, -343, -336, -329, -322, -315, -308, -301, -294, -287, -280, -273, -266, -259, -252, -245, -238, -231, -224, -217, -210, -203, -196, -189, -182, -175, -168, -161, -154, -147, -140, -133, -126, -119, -112, -105, -98, -91, -84, -77, -70, -63, -56, -49, -42, -35, -28, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, 154, 161, 168, 175, 182, 189, 196, 203, 210, 217, 224, 231, 238, 245, 252, 259, 266, 273, 280, 287, 294, 301, 308, 315, 322, 329, 336, 343, 350, 357, 364, 371, 378, 385, 392, 399, 406, 413, 420, 427, 434, 441, 448, 455, 462, 469, 476, 483, 490, 497, 504, 511, 518, 525, 532, 539, 546, 553, 560, 567, 574, 581, 588, 595, 602, 609, 616, 623, 630, 637, 644, 651, 658, 665, 672, 679, 686, 693, 700 }

```
> D(7):= divisors(7) union{seq(-k,k= divisors(7))};
```

$$\mathrm{D}(7) := \{-7, -1, 1, 7\}$$

**Conjunto dos Números Racionais**

Os números decimais são aqueles números que podem ser escritos na forma de fração.
Podemos escrevê-los de algumas formas diferentes:
Por exemplo:
- Em forma de fração ordinária
- Números decimais com finitas ordens decimais ou extensão finita
- Número decimal com infinitas ordens decimais ou de extensão infinita periódica. São dízimas periódicas simples ou compostas:

O conjunto dos números racionais é representado pela letra Q maiúscula.
Q={p/q,p,q são inteiros, q não nulo}

```
> restart;
> q:=a/b;# Fração.
```

$$q := \frac{a}{b}$$

```
> Q1:={seq(seq(k,k=1..25)/n,n=1..10)};
```

$$QI := \Big\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{4}, \frac{13}{4}, \frac{15}{4}, \frac{17}{4}, \frac{19}{4}, \frac{21}{4}, \frac{23}{4}, \frac{25}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{17}{3}, \frac{19}{3}, \frac{20}{3}, \frac{22}{3}, \frac{23}{3}, \frac{25}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{23}{6}, \frac{25}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{21}{5}, \frac{22}{5}, \frac{23}{5}, \frac{24}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}, \frac{11}{10}, \frac{13}{10}, \frac{25}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{10}{9},$$

$$\frac{11}{9}, \frac{13}{9}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}, \frac{9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{12}{5}, \frac{13}{5},$$
$$\frac{14}{5}, \frac{16}{5}, \frac{17}{5}, \frac{18}{5}, \frac{19}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{14}{9}, \frac{16}{9}, \frac{17}{9}, \frac{19}{9}, \frac{20}{9}, \frac{22}{9}, \frac{23}{9},$$
$$\frac{10}{7}, \frac{11}{7}, \frac{12}{7}, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \frac{16}{7}, \frac{17}{7}, \frac{18}{7}, \frac{19}{7}, \frac{20}{7}, \frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{24}{7},$$
$$\frac{25}{7}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \frac{17}{10}, \frac{19}{10}, \frac{21}{10}, \frac{23}{10}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}, \frac{15}{8}, \frac{17}{8}, \frac{19}{8}, \frac{21}{8}, \frac{23}{8},$$
$$\frac{25}{8}, \frac{19}{2}, \frac{21}{2}, \frac{23}{2}, \frac{25}{2}, \frac{11}{6}, \frac{13}{6}, \frac{17}{6}, \frac{19}{6}, \frac{1}{2}\}$$

```
> numer(q);# Numerador.
```

$$a$$

```
> denom(q);# Denominador.
```

$$b$$

```
> s:=a/b+c/d;
```

$$s := \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{a\,d + c\,b}{b\,d}$$

```
> mu:=(a/b)*(c/d);
```

$$\mu := \frac{a\,c}{b\,d}$$

```
> di:=(a/b)/(c/d);
```

$$di := \frac{a\,d}{b\,c}$$

```
> pot:=(a/b)^n;
```

$$pot := \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$$

```
> rad:=(a/b)^(m/n);
```

$$rad := \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Vamos ver alguns exemplos:

```
> a:=2;b:=-49;
```

$$a := 2$$
$$b := -49$$

```
> q;
```

$$-\frac{2}{49}$$

```
> c:=9;d:=-52;
```

$$c := 9$$
$$d := -52$$

```
> s;
```

$$-\frac{545}{2548}$$

```
> mu;
```

$$\frac{9}{1274}$$

```
> di;
```

$$\frac{104}{441}$$

```
> n:=-3;
```

$$n := -3$$

```
> pot;
```

$$-\frac{117649}{8}$$

```
> 2/4;# Simplifica.
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> m:=6;rad;
```

$$m := 6$$

$$\frac{2401}{4}$$

```
> misto:=2+1/5;# Apresenta como uma fração imprópria.
```

$$misto := \frac{11}{5}$$

```
> if numer (misto) > denom(misto) then print("Essa é uma fração imprópria");
  else print("Essa é uma fração própria"); end if;
```

"Essa é uma fração imprópria"

```
> 2/3.;
```

0.6666666667

```
> 2./3;# Converte para número decimal.
```

0.6666666667

```
> convert(0.6666666667,fraction);# Pode repetir o período 10 vezez que
  funciona.
```

$$\frac{2}{3}$$

```
> convert(0.1231231231,fraction);
```

$$\frac{41}{333}$$

```
> convert(0.2857142857,fraction);
```

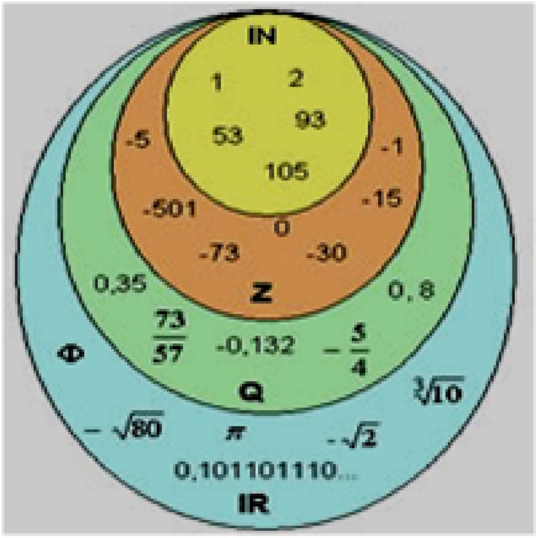
$$\frac{2}{7}$$

```
> 1./7;2./7;3./7;4./7;5./7;6./7;
```

0.1428571429
0.2857142857
0.4285714286
0.5714285714
0.7142857143
0.8571428572

## Conjunto dos Números Reais

Para chegarmos ao estudo dos números reais, temos que ter passado pelos números: naturais, inteiros, racionais e irracionais. Pois o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos racionais com os irracionais.




```
> restart;#veremos algumas expressões.
> x1:=355/113.;
```

$$x1 := 3.141592920$$

```
> x2:=(2143/22.)^(1/4);#(2143./22.)^1/4)
```

$$x2 := 3.141592653$$

```
> x3:=(77729/254.)^(1/5);
```

$$x3 := 3.141592654$$

```
> x4:=ln(10691/462.);
```

$$x4 := 3.141592654$$

```
> evalf(Pi,50);
```

$$3.1415926535897932384626433832795028841971693993751$$

```
> Pi;
```

$$\pi$$

```
> (Pi^4+Pi^5)/exp(6);
```

$$\frac{\pi^4+\pi^5}{e^6}$$

```
> evalf(%);#valor aproxi(1).
```

$$0.9999999569$$

```
> abs(-7./5);#valor absoluto.
```

$$1.400000000$$

```
> abs(-14+8./3+sqrt(5.));
```

$$9.097265353$$

```
> min(-10,8,x1,-5*x2);
```

$$-15.70796326$$

```
> max(-10,8,x1,-5*x2);
```

$$8$$

```
> isprime(5);#conjunto dos numeros inteiros.
```

$$true$$

```
> isprime(5.);#erro
Error, (in isprime) argument must be an integer
```

```
> x5:=1/(2)^(1/2);#1/sqrt(2).
```

$$x5 := \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

```
> x6:=1/(1+2^(1/2));#1/(1+sqrt(2);
```

$$x6 := \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

```
> rationalize(x6);#serve para racionalisar as expressões.
```

$$\sqrt{2}-1$$

```
> x7:=1/(1+2^(1/2));
```

$$x7 := \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

```
> rationalize(x7);
```

$$\sqrt{2}-1$$

```
> rationalize([x/(x+sqrt(3)),x/(x+sqrt(8+sqrt(3))),(x+y)/((x+y)*sqrt(7)+sqrt
  (8))]);
```

$$\left[\frac{x\left(x-\sqrt{3}\right)}{x^2-3}, \frac{x\left(x-\sqrt{8+\sqrt{3}}\right)\left(x^2-8+\sqrt{3}\right)}{x^4-16x^2+61}, \frac{(x+y)\left(\sqrt{7}\,x+\sqrt{7}\,y-2\sqrt{2}\right)}{7x^2+14xy+7y^2-8}\right]$$

```
> rationalize([x6,x7]);
```

$$\left[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1\right]$$

```
> x8:=1/(2-2^(1/3));rationalize(x8);
```

$$x8 := \frac{1}{2-2^{1/3}}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\,2^{1/3}+\frac{1}{6}\,2^{2/3}$$

```
> x9:=5/(3+2*(5/3));rationalize(x9);
```

$$x9 := \frac{15}{19}$$

$$\frac{15}{19}$$

## Conjunto dos Números Complexos.

Ao resolver uma equação do 2º grau podemos obter três resultados, dependendo do valor do discriminante:
$\Delta > 0$, duas raízes reais diferentes.
$\Delta = 0$, uma raiz real.
$\Delta < 0$, nenhuma raiz real.

Resolvendo a equação do 2º grau dentro do universo dos números reais, os casos em que $\Delta < 0$ não podem ser resolvidos, pois não existe raiz de número negativo dentro do conjunto dos números reais.

O surgimento dos números complexos possibilitou obter soluções para casos em que é necessário descobrir novos conjuntos numéricos, onde o quadrado de um número negativo tem como resultado um número negativo.

Iremos representar essa proposição utilizando uma unidade imaginária i, assim poderemos dizer que o quadrado de um número é um número negativo, então i * i = - 1, isto é, $i^2 = -1$ .

Representamos um número complexo z = (x,y) sendo x Є R e y Є R, na seguinte forma: z = a + bi (forma algébrica) , onde a é a parte real de z e b a parte imaginária de z.
Exemplos:

z = 2 + 4i : Re(z) = 2 Im(z) = 4
z = 5 – 2i : Re (z) = 5 Im (z) = –2

A equação do 2º grau $x^2 + 25 = 0$ é impossível de ser resolvida no conjunto dos números Reais, mas pode ser resolvida dentro do conjunto dos números Complexos, da seguinte forma:

$x^2 + 81 = 0$ (Equação incompleta do 2º grau)
$x^2 = -81$
$x = \pm\sqrt{-81}$
Temos $(\pm 9i)^2 = (\pm 9)^2 * i^2 = 81 * (-1) = -81$
$x = \pm 9i$

$2x^2 - 16x + 50 = 0$ (Equação completa do 2º grau)
$a = 2$, $b = -16$, $c = 50$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-16)^2 - 4 * 2 * 50$
$\Delta = 256 - 400$
$\Delta = -144$

Temos $(\pm 12i)^2 = 144i^2 = 144*(-1) = -144$

```
> restart;
> z:=a+b*I;#I=i=rais de -1;
```

$$z := a + \mathrm{I}\, b$$

```
> w:=c+d*I;
```

$$w := c + \mathrm{I}\, d$$

```
> adição:=z+w;evalc(%);#a pertence ao complexo.
```

$$\mathit{adição} := a + \mathrm{I}\, b + c + \mathrm{I}\, d$$

$$a + c + \mathrm{I}\,(b + d)$$

```
> multiplicação:=z*w;evalc(%);
```

$$\mathit{multiplicação} := (a + \mathrm{I}\, b)\,(c + \mathrm{I}\, d)$$

$$a\,c - b\,d + \mathrm{I}\,(a\,d + b\,c)$$

```
> Re(z);#não sempara a raiz....
```

$$\Re(a + \mathrm{I}\, b)$$

```
> z/w;evalc(%);
```

$$\frac{a + \mathrm{I}\, b}{c + \mathrm{I}\, d}$$

$$\frac{a\,c}{c^2 + d^2} + \frac{b\,d}{c^2 + d^2} + \mathrm{I}\left(\frac{b\,c}{c^2 + d^2} - \frac{a\,d}{c^2 + d^2}\right)$$

```
> conjugate(z);evalc(%);
```

$$\overline{a + \mathrm{I}\, b}$$

$$a - \mathrm{I}\, b$$

```
> z1:=+3-2*I;
```

$$z1 := 3 - 2\,\mathrm{I}$$

```
> z2:=-2+4*I;
```

$$z2 := -2 + 4\,\mathrm{I}$$

```
> z3:=-1-I;
```

$$z3 := -1 - \mathrm{I}$$

```
> z4:=1+sqrt(3)*I;
```

$$z4 := 1 + \mathrm{I}\sqrt{3}$$

```
> z1+z2-z3;
```

$$2 + 3\,\mathrm{I}$$

```
> 2*z4;
```

$$2 + 2\,\mathrm{I}\sqrt{3}$$

```
> Re(z2);
```

$$-2$$

```
> Im(z2);
```

$$4$$

```
> conjugate(z2);
```

$$-2-4\,I$$

```
> conjugate(z2+5*z3);
```

$$-7+I$$

```
> z1*z2;
```

$$2+16\,I$$

```
> z3/z4;
```

$$\frac{-1-I}{1+I\sqrt{3}}$$

```
> z3^2;
```

$$2\,I$$

```
> z3^153;
```

$$-75557863725914323419136-75557863725914323419136\,I$$

```
> sqrt(z2);evalc(%);
```

$$\sqrt{-2+4\,I}$$

$$\sqrt{\sqrt{5}-1}+I\sqrt{\sqrt{5}+1}$$

```
> rho:=abs(z3);
```

$$\rho:=\sqrt{2}$$

**Forma Polar**

```
> restart;
> z:=a+b*I;# i=sqrt(-1)=I
```

$$z:=a+I\,b$$

```
> rho:=abs(z);
```

$$\rho:=|a+I\,b|$$

```
> theta:=argument(z);
```

$$\theta:=\mathrm{argument}(a+I\,b)$$

```
> polar(z);
```

$$\mathrm{polar}(|a+I\,b|,\mathrm{argument}(a+I\,b))$$

```
> z1:=1+I;
```

$$z1:=1+I$$

```
> rho:=abs(z1);
```

$$\rho:=\sqrt{2}$$

```
> theta1:=argument(z1);
```

$$\theta1:=\frac{1}{4}\,\pi$$

```
> polar(z1);
```

$$\mathrm{polar}\left(\sqrt{2},\frac{1}{4}\,\pi\right)$$

```
> z1:=sqrt(2)*(cos(Pi/4)+I*sin(Pi/4));
```

$$z1:=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\,I\sqrt{2}\right)$$

```
> z2:=-1+I;
```

$$z2:=-1+I$$

```
> polar(z2);
```

$$\mathrm{polar}\left(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$$

```
> z3:=-2-sqrt(2)*I;
```

$$z3 := -2 - I\sqrt{2}$$

```
> polar (z3);
```

$$\mathrm{polar}\left(\sqrt{6}, \arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \pi\right)$$

```
> z4:=1-sqrt(3)*I;
```

$$z4 := 1 - I\sqrt{3}$$

```
> polar(z4);
```

$$\mathrm{polar}\left(2, -\frac{1}{3}\pi\right)$$

```
> z5:=I;
```

$$z5 := I$$

```
> polar(z5);
```

$$\mathrm{polar}\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$$

```
> z6:=-I/2;
```

$$z6 := -\frac{1}{2}I$$

```
> polar(z6);
```

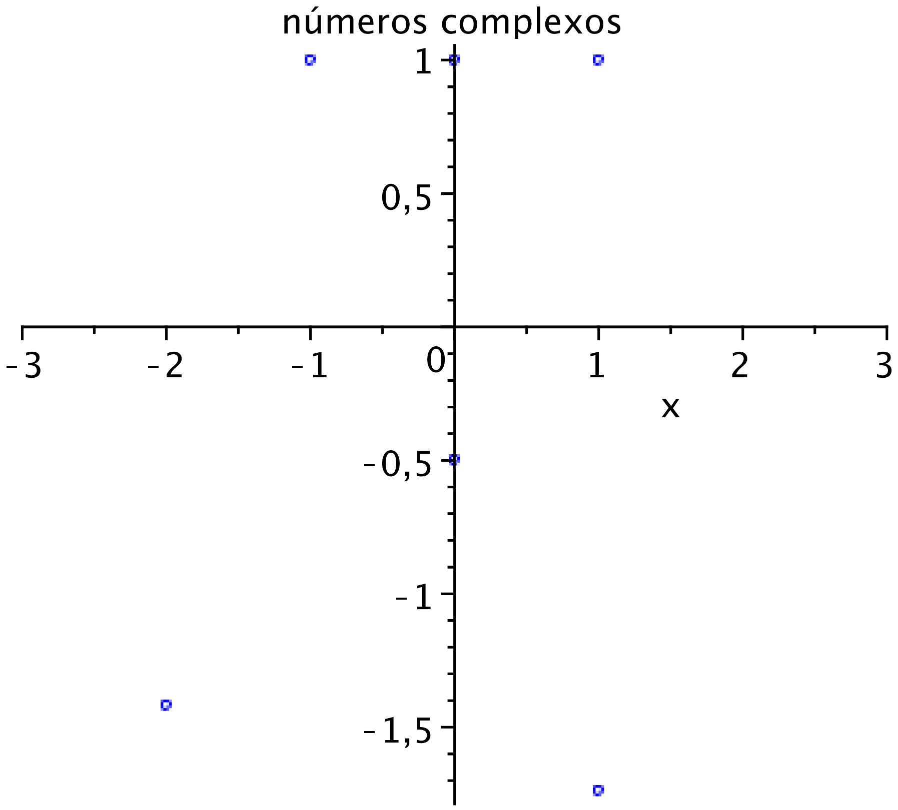
$$\mathrm{polar}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\pi\right)$$

**Representação Geométrica**

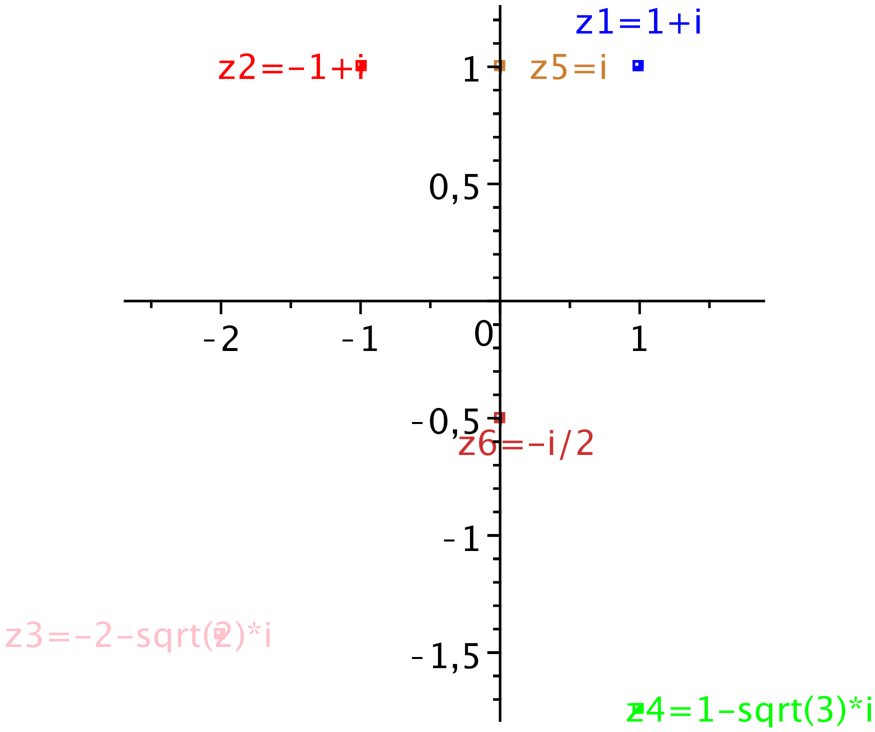
Para representar um número complexo no plano Gaussiano é necessário chamar o pacote "with (plots)" e usamos o comando "complex plot".

Ex:

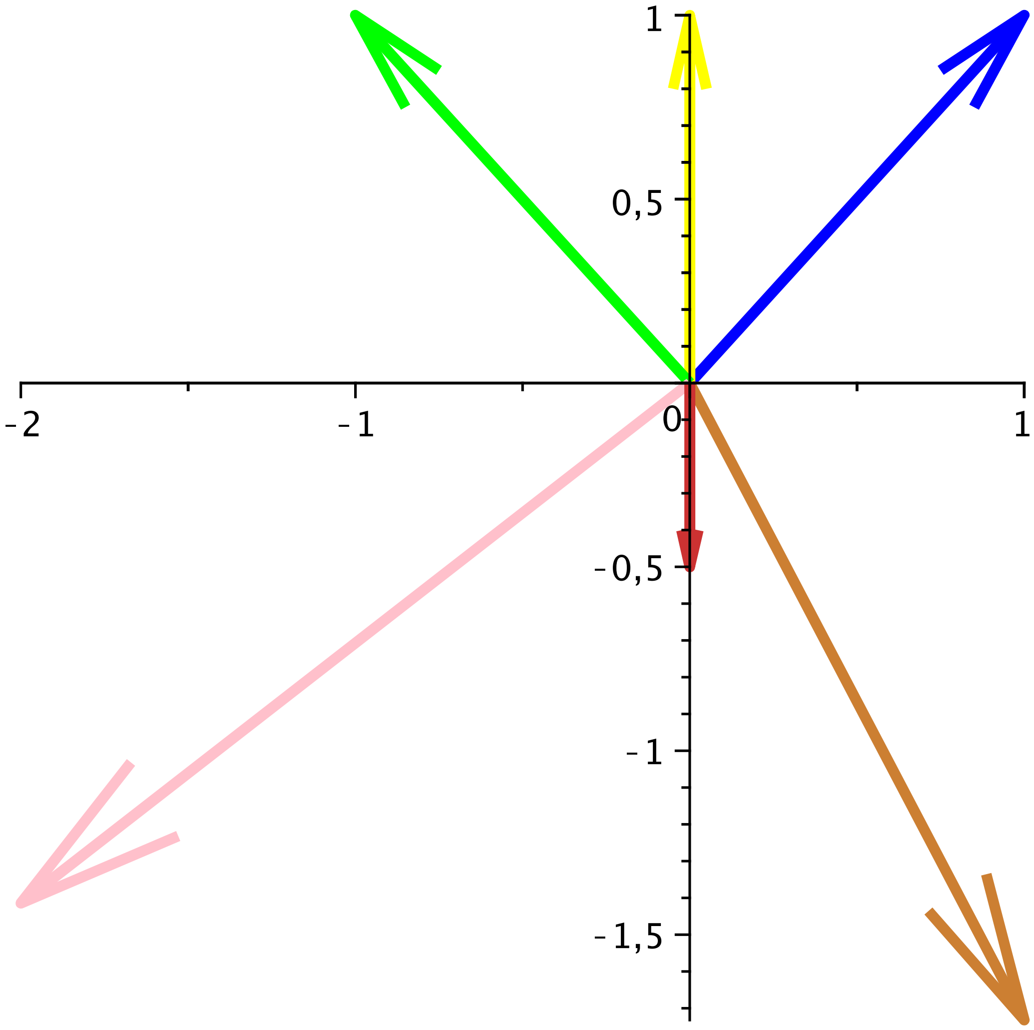
```
> with(plots):
> complexplot({z1,z2,z3,z4,z5,z6},x=-3..3,style=point,symbol=circle,color=
  blue,title="números complexos");
```




```
> t1:=textplot([1,1.2,"z1=1+i"],color=blue):
> c1:=complexplot(z1,x=-3..3,style=point,symbol=circle,color=blue):
> t2:=textplot([-1.5,1,"z2=-1+i"],color=red):
> c2:=complexplot(z2,x=-3..3,style=point,symbol=circle,color=red):
> t3:=textplot([-2.6,-sqrt(2),"z3=-2-sqrt(2)*i"],color=pink):
> c3:=complexplot(z3,x=-3..3,style=point,symbol=circle,color=pink):
> t4:=textplot([1.8,-sqrt(3),"z4=1-sqrt(3)*i"],color=green):
> c4:=complexplot(z4,x=-3..3,style=point,symbol=circle,color=green):
> t5:=textplot([0.5,1,"z5=i"],color=gold):
> c5:=complexplot(z5,x=-3..3,style=point,symbol=circle,color=gold):
> t6:=textplot([0.2,-0.6,"z6=-i/2"],color=orange):
> c6:=complexplot(z6,x=-3..3,style=point,symbol=circle,color=orange):
> display(c1,c2,c3,c4,c5,c6,t1,t2,t3,t4,t5,t6);
```




```
> with(linalg):
> v1:=arrow([Re(z1),Im(z1)],color=blue,shape=arrow,thickness=4):
> v2:=arrow([Re(z2),Im(z2)],color=green,shape=arrow,thickness=4):
> v3:=arrow([Re(z3),Im(z3)],color=pink,shape=arrow,thickness=4):
> v4:=arrow([Re(z4),Im(z4)],color=gold,shape=arrow,thickness=4):
> v5:=arrow([Re(z5),Im(z5)],color=yellow,shape=arrow,thickness=4):
> v6:=arrow([Re(z6),Im(z6)],color=orange,shape=arrow,thickness=4):
> display(v1,v2,v3,v4,v5,v6);# pode colocar o thickness só no display
```




## Produto Cartesiano e Polígonos

Nesta seção vamos trabalhar com produto cartesianho. Para isso, precisamos "chamar os pacotes":with(combinat,cartprod)
.

```
> restart;
> with(plots);
Warning, the name changecoords has been redefined
```

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *cylinderplot*, *densityplot*, *display*, *display3d*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *graphplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *replot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *sphereplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*]

```
> with(combinat,cartprod):
> A:={a,b,c};B:={r,a,n,d,u};
```

$$A := \{a, b, c\}$$
$$B := \{u, a, d, n, r\}$$

```
> C:=cartprod([A,B]):
```

```
> while not C[finished] do C[nextvalue]() end do;
```

$$[a, u]$$
$$[a, a]$$
$$[a, d]$$
$$[a, n]$$
$$[a, r]$$
$$[b, u]$$
$$[b, a]$$
$$[b, d]$$
$$[b, n]$$
$$[b, r]$$
$$[c, u]$$
$$[c, a]$$
$$[c, d]$$
$$[c, n]$$
$$[c, r]$$

```
> E:={-1,2,3};
```

$$E := \{-1, 2, 3\}$$

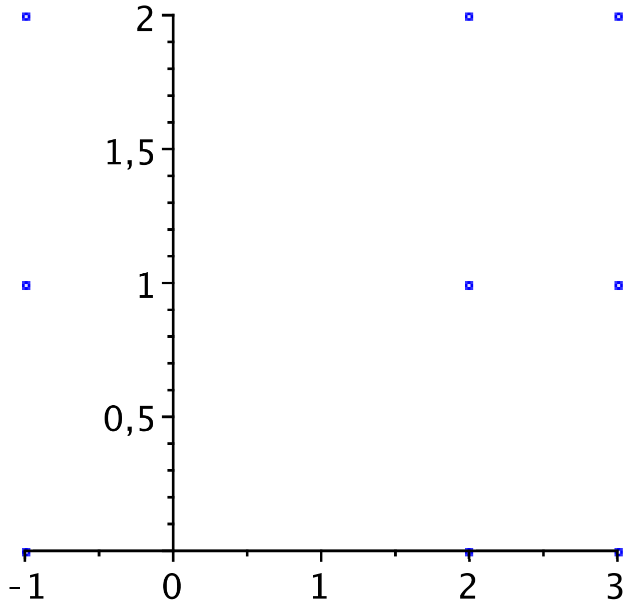
```
> F:={0,1,2};
```

$$F := \{0, 1, 2\}$$

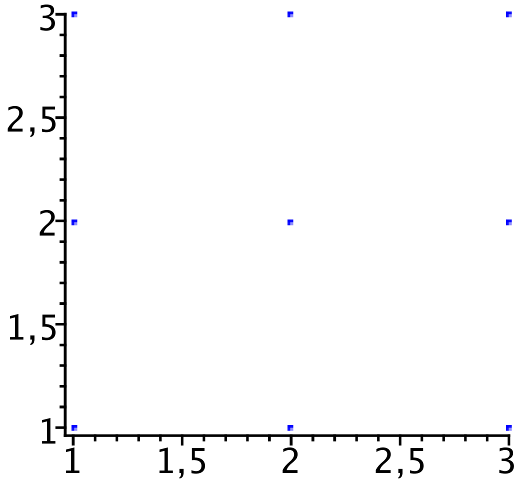
```
> G:=cartprod([E,F]):
> while not G[finished] do G[nextvalue]() end do;
```

$$[-1, 0]$$
$$[-1, 1]$$
$$[-1, 2]$$
$$[2, 0]$$
$$[2, 1]$$
$$[2, 2]$$
$$[3, 0]$$
$$[3, 1]$$
$$[3, 2]$$

```
> pointplot({[-1,0],[-1,1],[-1,2],[2,0],[2,1],[2,2],[3,0],[3,1],[3,2]},color=
blue,symbol=circle);
```



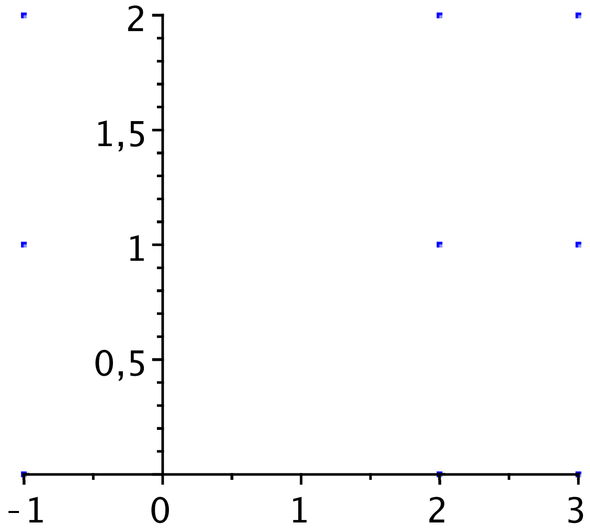

```
> for i from 1 to 3 do
    for j from 1 to 3 do
      G[i,j]:=[E[i],F[j]];
  od;od;
> pointplot({seq(seq([k,n],k=1..3),n=1..3)},color=blue,symbol=circle);
```




```
> G[2,2];
```

[2, 1]

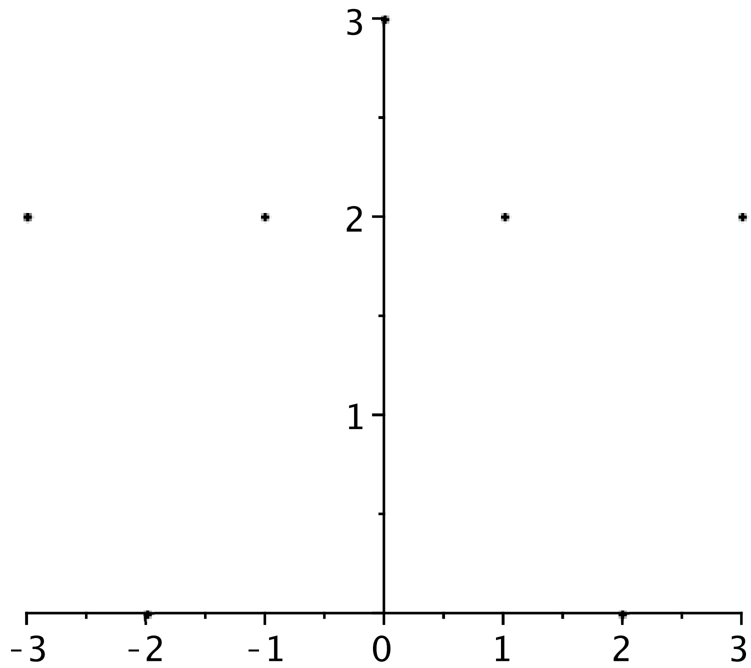
```
> pointplot({seq(seq(G[i,j],i=1..3),j=1..3)},color=blue,symbol=circle);
```



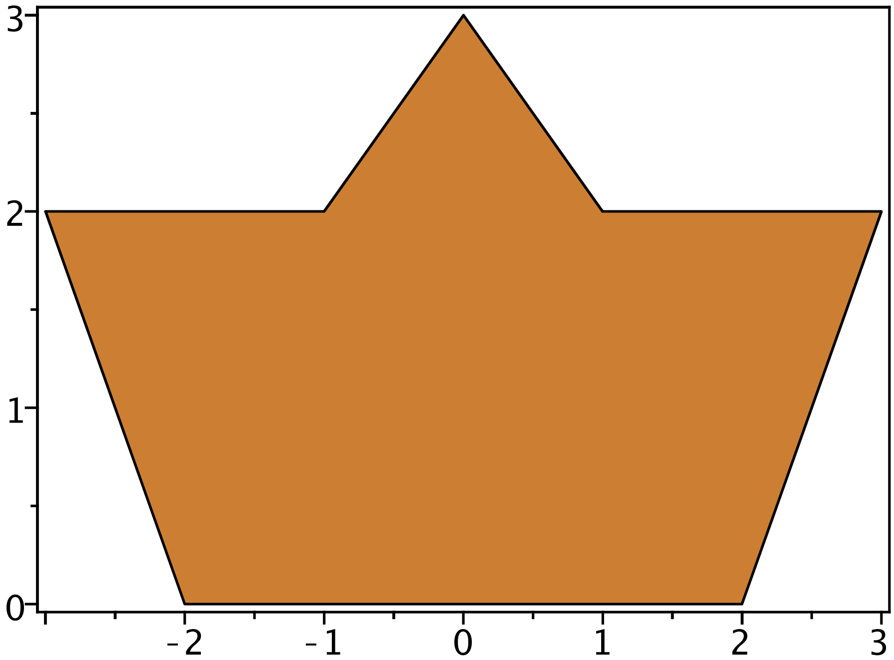

```
> barco:=[[-3,2],[-1,2],[0,3],[1,2],[3,2],[2,0],[-2,0],[-3,2]];
```

$$barco := [[-3, 2], [-1, 2], [0, 3], [1, 2], [3, 2], [2, 0], [-2, 0], [-3, 2]]$$

```
> pointplot(barco,color=black);
```



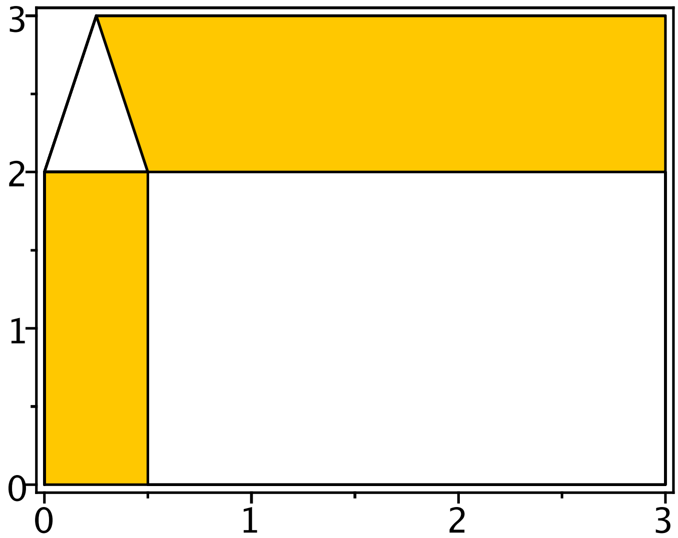

```
> polygonplot(barco,axes=boxed);
```



```
> casa:=[[0,0],[0,2],[0.25,3],[0.5,2],[0,2],[0.5,2],[3,2],[3,0],[0.5,0],[0.5,
  2],[0,2],[0,0],[0.5,0],[3,0],[3,3],[0.25,3],[0,2]];
```

$casa := [[0, 0], [0, 2], [0.25, 3], [0.5, 2], [0, 2], [0.5, 2], [3, 2], [3, 0], [0.5, 0], [0.5, 2], [0, 2], [0, 0], [0.5, 0], [3, 0], [3, 3], [0.25, 3], [0, 2]]$

```
> polygonplot(casa,axes=boxed);
```



```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

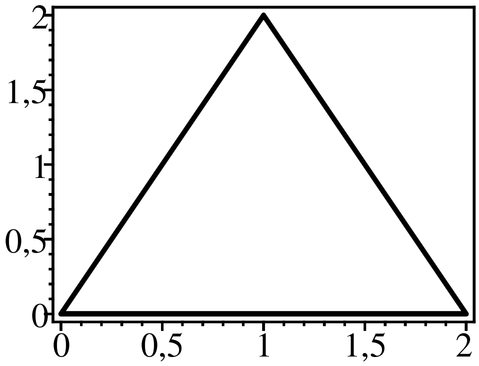
**Polígonos**

```
> restart;with(plots):
> T:=[[0,0],[1,2],[2,0]];
```

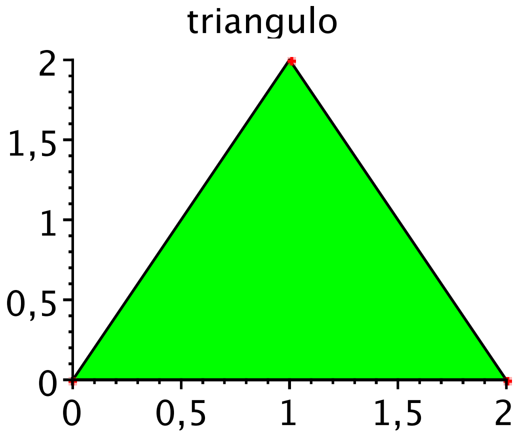
$T := [[0, 0], [1, 2], [2, 0]]$

```
> pointplot(T, color=blue, color=blue, symbol=circle):
```

```
> polygonplot(T,thickness=2,axes=box,color=white);
```



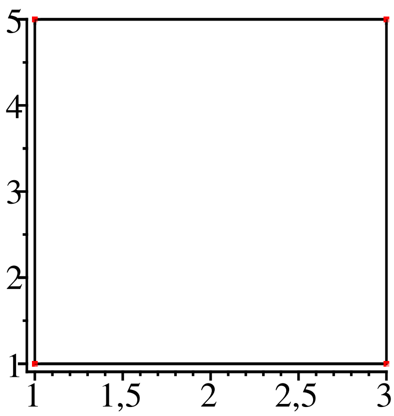

```
> c1:=pointplot(T,color=red,title='triangulo'):
> c2:=polygonplot(T,color=green):
> display(c1,c2);
```




```
> R:=[[1,1],[3,1],[3,5],[1,5],[1,1]];
```

$$R := [[1, 1], [3, 1], [3, 5], [1, 5], [1, 1]]$$

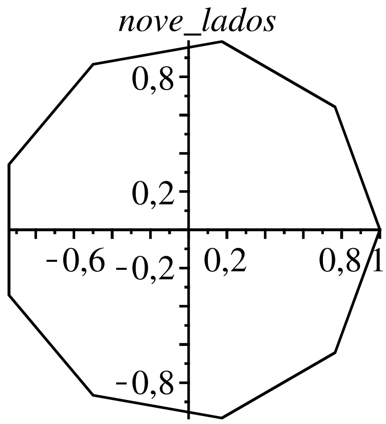
```
> R1:=pointplot(R,color=red,symbol=circle):
> R2:=polygonplot(R, color=white):
> display(R1,R2);
```




```
> npoly := n -> [seq([cos(2*Pi*i/n), sin(2*Pi*i/n)], i = 1..n)];
```

$$npoly := n \rightarrow \left[ seq\left( \left[ \cos\left( \frac{2\,\pi\,i}{n} \right), \sin\left( \frac{2\,\pi\,i}{n} \right) \right], i = 1\,..n \right) \right]$$

```
> display([polygonplot(npoly(9))],title='nove_lados', color=white);
```



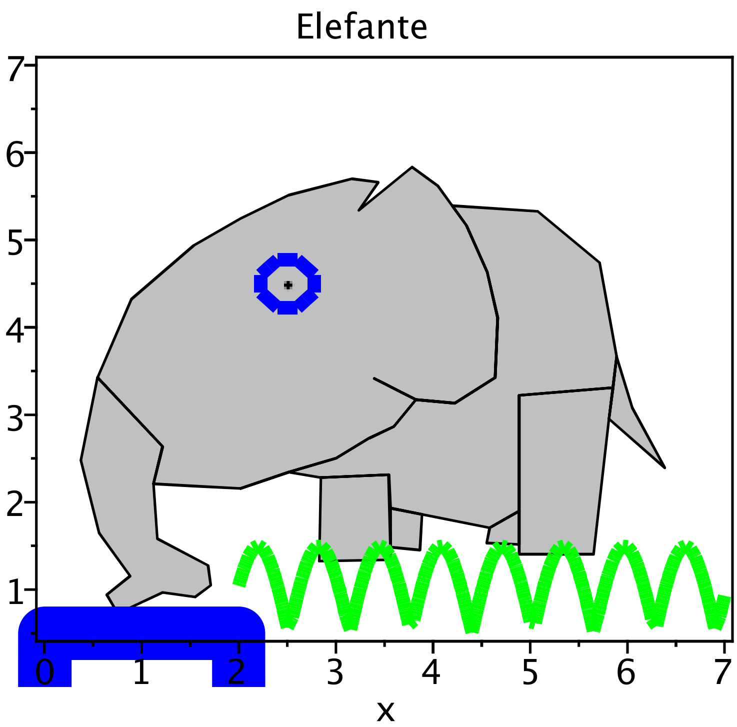

**Desenhos no plano cartesiano**

```
> restart;
> with(plots):
> with(combinat,cartprod);
```

$[cartprod]$

```
> elefante:=[[2.018,2.157],[1.537,2.184],[1.122,2.210],[1.216,2.638],
  [0.547,3.427],[1.216,2.638],[1.122,2.210],[1.162,1.582],[1.684,1.275],
  [1.711,1.047],[1.550,0.914],[1.216,0.967],[0.755,0.726],[0.641,0.940],
  [0.882,1.154],[0.561,1.649],[0.374,2.478],[0.547,3.427],[0.895,4.323],
  [1.537,4.938],[2.018,5.245],[2.513,5.513],[3.168,5.7],[3.435,5.660],
  [3.235,5.339],[3.783,5.834],[4.050,5.620],[4.344,5.165],[4.558,4.630],
  [4.665,4.109],[4.639,3.427],[4.224,3.133],[3.823,3.173],[3.395,3.414],
  [3.823,3.173],[3.596,2.866],[3.342,2.732],[3.007,2.505],[2.513,2.344],
  [2.018,2.157],[2.513,2.344],[2.844,2.281],[2.828,1.324],[3.562,1.340],
  [3.562,1.931],[3.886,1.860],[3.865,1.452],[3.562,1.484],[3.542,2.313],
  [2.844,2.281],[3.546,2.313],[3.562,1.931],[3.886,1.860],[4.583,1.707],
  [4.551,1.532],[4.886,1.516],[4.886,1.404],[5.651,1.404],[5.811,2.951],
  [5.851,3.310],[5.811,2.951],[6.385,2.393],[6.050,3.079],[5.890,3.663],
  [5.851,3.310],[4.886,3.222],[4.886,1.516],[4.886,1.899],[4.583,1.707],
  [4.886,1.899],[4.886,3.222],[5.851,3.310],[5.890,3.669],[5.715,4.738],
  [5.077,5.328],[4.197,5.392],[4.344,5.165],[4.558,4.630],[4.665,4.109],
  [4.639,3.427],[4.224,3.133],[3.823,3.173],[3.395,3.414],[3.823,3.173],
  [3.596,2.866],[3.342,2.732],[3.007,2.505],[2.513,2.344]]:
> t1:=pointplot(elefante,color=gray):
> olho2:=implicitplot((x - 2.5)^2 + (y(x)-4.5)^2 =0.09,x=-10..10,y=-10..10,
  thickness=5,color=blue,numpoints=10000):
> delefante:=polygonplot(elefante,axes=boxed,title='Elefante',color=gray):
> grama:=implicitplot(y(x) = abs(sin(5*x))+0.5,x=2..7,y=0..6,thickness=5,
  color=green,numpoints=10000):
> olho1:= pointplot([2.5,4.5],thickness=10,color=black):
> f:=piecewise(x>0  and x<2,0.5,-6):
> agua:=plot(f,x=0..7,0.5..7,thickness=20,color=blue):;
> display(agua,grama,delefante,olho1,olho2);
```

\>




```
> restart;
> with(plots) :
> base := [[7, 9], [7, 0], [16, 0], [16, 9], [7, 9]];
```
$$base := [[7, 9], [7, 0], [16, 0], [16, 9], [7, 9]] \tag{18.2.1}$$

```
> teto := [[5, 9], [7, 16], [16, 16], [18, 9], [5, 9]];
```
$$teto := [[5, 9], [7, 16], [16, 16], [18, 9], [5, 9]] \tag{18.2.2}$$

```
> bcruz := [[8, 16], [10, 16], [10, 18], [8, 18], [8, 16]];
```
$$bcruz := [[8, 16], [10, 16], [10, 18], [8, 18], [8, 16]] \tag{18.2.3}$$

```
> trian := [[7, 18], [11, 18], [10, 21], [8, 21], [7, 18]];
```
$$trian := [[7, 18], [11, 18], [10, 21], [8, 21], [7, 18]] \tag{18.2.4}$$

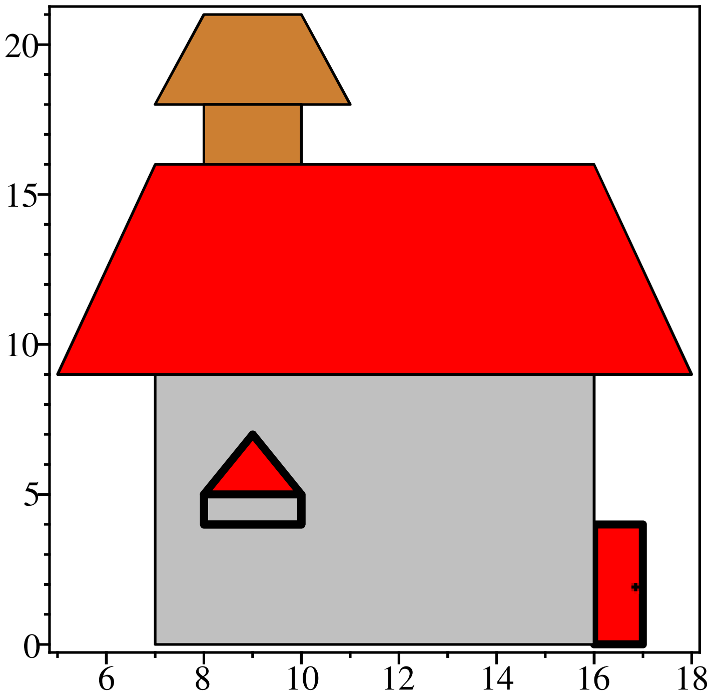
```
> janela1 := [[8, 4], [10, 4], [10, 5], [9, 7], [8, 5], [10, 5], [10, 4], [8, 4], [8, 5]];
```
$$janela1 := [[8, 4], [10, 4], [10, 5], [9, 7], [8, 5], [10, 5], [10, 4], [8, 4], [8, 5]] \tag{18.2.5}$$

```
> porta := [[16, 0], [17, 0], [17, 4], [16, 4], [16, 0]];
```
$$porta := [[16, 0], [17, 0], [17, 4], [16, 4], [16, 0]] \tag{18.2.6}$$

```
> P := [[16.8, 2]];
```
$$P := [[16.8, 2]] \tag{18.2.7}$$

```
> c1 := polygonplot(base, color = gray, axes = boxed) :
> c2 := polygonplot(teto, color = red, axes = boxed) :
> c3 := polygonplot(bcruz, color = gold, axes = boxed) :
> c4 := polygonplot(trian, color = gold, axes = boxed) :
>
> c6 := polygonplot(janela1, color = red, axes = boxed, thickness = 3) :
> c7 := polygonplot(porta, color = red, axes = boxed, thickness = 3) :
> c8 := pointplot(P, color = black, color = black, thickness = 3);
```
$$c8 := PLOT(...) \tag{18.2.8}$$

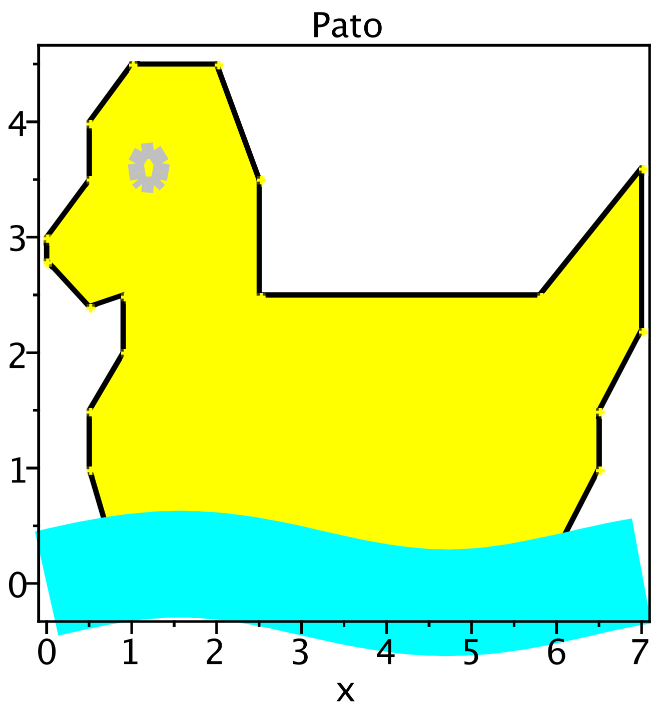
```
> display(c6, c1, c2, c3, c4, c7, c8);
```




```
> restart; with(plots) :
> T := [[0, 3], [0.5, 3.5], [0.5, 4], [1, 4.5], [2, 4.5], [2.5, 3.5], [2.5, 2.5], [5.8, 2.5], [7, 3.6], [7, 2.2],
      [6.5, 1.5], [6.5, 1], [5.8, 0], [0.9, 0], [0.5, 1], [0.5, 1.5], [0.9, 2], [0.9, 2.5], [0.5, 2.4], [0, 2.8],
      [0, 2.8], [0, 3]];
```

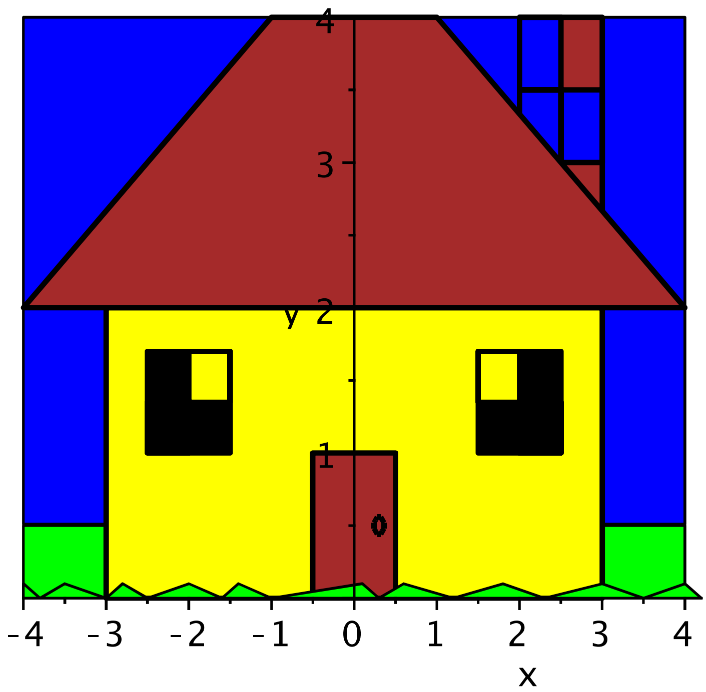
$T := [[0, 3], [0.5, 3.5], [0.5, 4], [1, 4.5], [2, 4.5], [2.5, 3.5], [2.5, 2.5], [5.8, 2.5], [7, 3.6], [7, 2.2], [6.5, 1.5], [6.5, 1], [5.8, 0], [0.9, 0], [0.5, 1], [0.5, 1.5], [0.9, 2], [0.9, 2.5], [0.5, 2.4], [0, 2.8], [0, 2.8], [0, 3]]$ **(18.2.9)**

```
> c1:=pointplot(T,color=yellow,title='Pato'):
> c2:=plot(sin(x)/6,x=0..7,color=cyan,thickness=40):
> c3:=polygonplot(T,thickness=2,axes=boxed):
> c4:=implicitplot((x-1.2)^2+(y(x)-3.6)^2 = 0.03,x=-7..7,y=-7..7,numpoints=
  10000,color=gray,thickness=6):
> display(c4,c2,c3,c1);
```



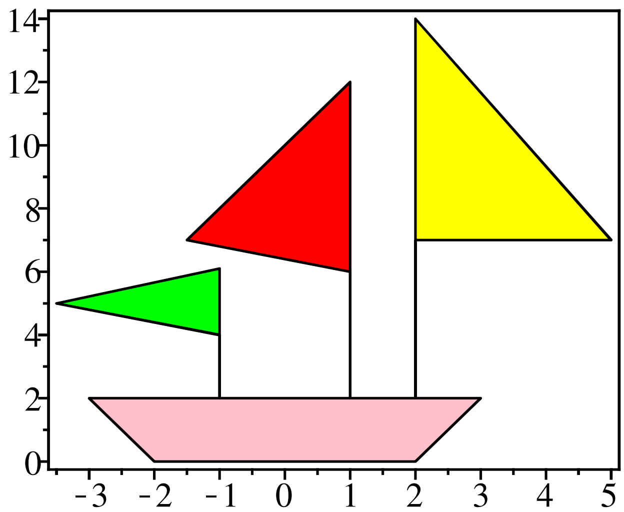

```
> restart:with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined

casa:=[[-3,0],[-3,2],[-1,2],[1,2],[3,2],[3,0],[0.5,0],[0.5,1],[-0.5,1],[-0.5,
0]]:
> telhado:=[[-4,2],[-1,4],[1,4],[4,2]]:
> chaminé:=[[2,3.2],[2,4],[3,4],[3,2.5],[2.5,3],[2.5,3],[2.5,3.5],[2.5,3],
  [3,3],[3,3.5],[2,3.5],[2.5,3.5],[2.5,4],[2,4]]:
> janela1:=[[-2.5,1],[-2.5,1.7],[-1.5,1.7],[-1.5,1],[-2,1],[-2,1.35],[-1.5,
  1.35],[-1.5,1.7],[-2,1.7],[-2,1],[-2.5,1],[-2.5,1.35],[-2,1.35],[-2,1]]:
> janela2:=[[2.5,1],[2.5,1.7],[1.5,1.7],[1.5,1],[2,1],[2,1.35],[1.5,1.35],
  [1.5,1.7],[2,1.7],[2,1],[2.5,1],[2.5,1.35],[2,1.35],[2,1]]:
> porta:=[[0.5,0],[0.5,1],[-0.5,1],[-0.5,0]]:
> grama:=[[-4,0],[-4,0.1],[-3.8,0],[-3.5,0.1],[-3,0],[-2.8,0.1],[-2.5,0],
  [-2,0.1],[-1.6,0],[-1.4,0.1],[-1,0],[0.1,0.1],[0.3,0],[0.6,0.1],[1.2,0],
  [1.8,0.1],[2.3,0],[3,0.1],[3.5,0],[4,0.1],[4.2,0]]:
> jardim:=[[-4,0],[-4,0.5],[4,0.5],[4,0]]:
> céu:=[[-4,0.51],[-4,4],[4,4],[4,0.51]]:
> g1:=polygonplot(casa,color=yellow,thickness=2):
> g2:=polygonplot(telhado,color=brown,thickness=2):
> g3:=polygonplot(chaminé,color=brown,thickness=2):
> g4:=polygonplot(janela1,thickness=2):
> g5:=polygonplot(janela2,thickness=2):
> g6:=polygonplot(porta,thickness=2,color=brown):
> g7:=implicitplot((x-0.3)^2+(y(x)-0.5)^2=0.004,x=0..1,y=0..1,color=black,
  thickness=2):
> g8:=polygonplot(grama,color=green):
> g9:=polygonplot(jardim,color=green):
> g10:=polygonplot(céu,color=blue):
> display(g8,g7,g6,g5,g4,g2,g3,g1,g9,g10);
```

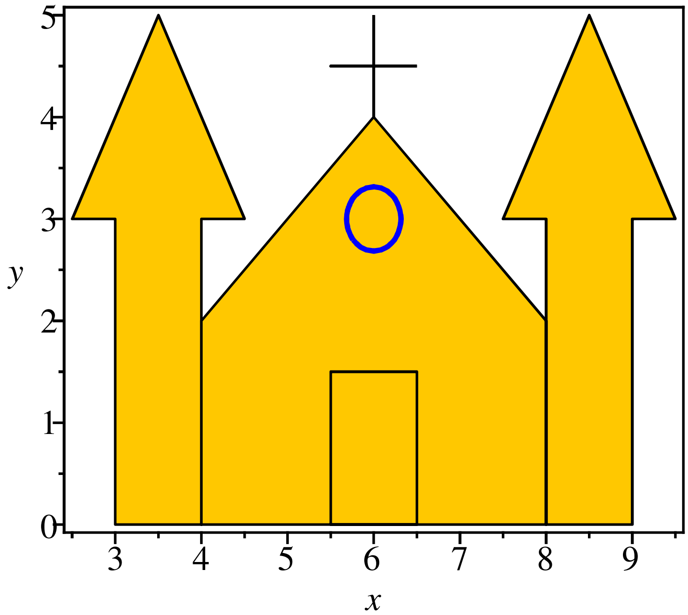



```
> restart;with(plots):
```

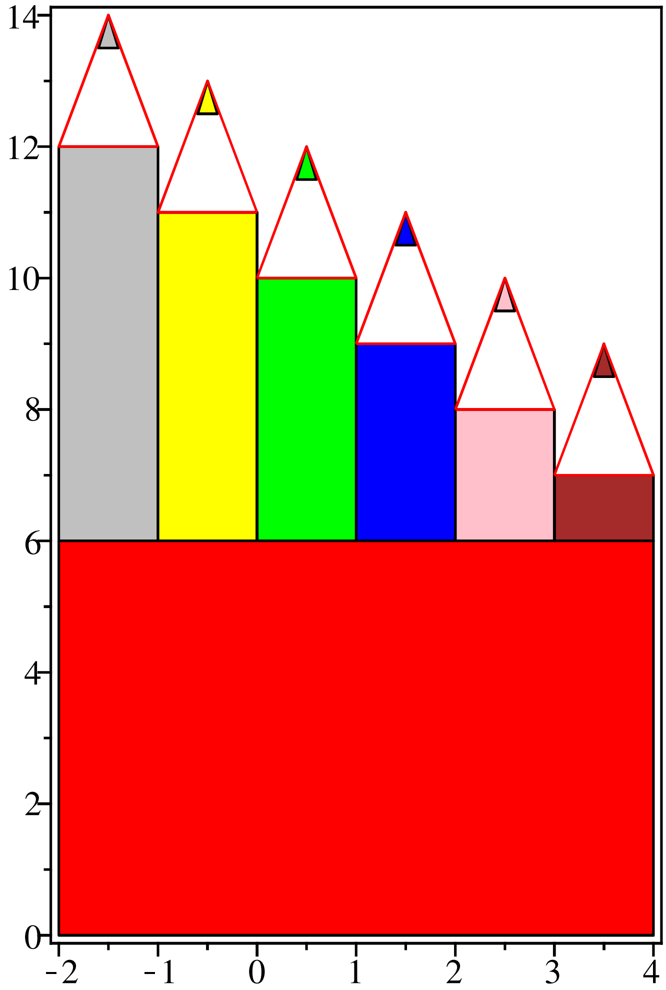
```
> with(combinat,cartprod):
> A:=[[-3,2],[-2,0],[2,0],[3,2]]:
> c2:=polygonplot(A,axes=boxed,color=pink):
> B:=[[2,14],[5,7],[2,7]]:

> c3:=polygonplot(B,axes=boxed, color=yellow):
> F:=[[2,7],[2,2]]:
> c6:=polygonplot(F,axes=boxed):
> C:=[[1,12],[-1.5,7],[1,6]]:
> c4:=polygonplot(C,axes=boxed,color=red):
> G:=[[1,6],[1,2]]:
> c7:=polygonplot(G,axes=boxed):
> E:=[[-1,6.1],[-3.5,5],[-1,4]]:
> c5:=polygonplot(E,axes=boxed, color=green):
> H:=[[-1,2],[-1,4]]:
> c8:=polygonplot(H,axes=boxed):
> display(c2,c3,c6,c4,c7,c5,c8);
```




```
> restart;with(plots):
> with(combinat,cartprod):
> c1:=implicitplot((x-6)^2+(y-3)^2=0.1,x=0..8,y=1..5,color=blue,numpoints=
  10000,thickness=2):
> igreja:=[[3,0],[3,3],[2.5,3],[3.5,5],[4.5,3],[4,3],[4,0],[4,2],[6,4],[6,
  5],[6,4.5],[6.5,4.5],[5.5,4.5],[6,4.5],[6,4],[8,2],[8,0],[8,3],[7.5,3],
  [8.5,5],[9.5,3],[9,3],[9,0],[5.5,0],[5.5,1.5],[6.5,1.5],[6.5,0]]:
> pointplot(igreja,color=red): #aparecem somente os pontos
> c2:=polygonplot(igreja,axes=boxed):

> display(c1,c2);
```




```
> restart:#LAPIZ de COR
> with(plots):
> c:=[[-2,0],[4,0],[4,6],[-2,6]]:#caixa
> l1:=[[0,6],[1,6],[1,10],[0,10],[0,6]]:#lápis 1
> l2:=[[1,6],[2,6],[2,9],[1,9],[1,6]]:#lápis 2
> l3:=[[2,6],[3,6],[3,8],[2,8],[2,6]]:# lápis 3
> l4:=[[3,6],[4,6],[4,7],[3,7],[3,6]]:# lápis 4
> l5:=[[0,6],[-1,6],[-1,11],[0,11],[0,6]]:#lápis 5
> l6:=[[-1,6],[-2,6],[-2,12],[-1,12],[-1,6]]:#lápis 6
> p1:=[[0,10],[1,10],[0.5,12],[0,10]]:
> p2:=[[1,9],[2,9],[1.5,11],[1,9]]:
> p3:=[[2,8],[3,8],[2.5,10],[2,8]]:
> p4:=[[3,7],[4,7],[3.5,9],[3,7]]:
> p5:=[[0,11],[-1,11],[-0.5,13],[0,11]]:
> p6:=[[-1,12],[-2,12],[-1.5,14],[-1,12]]:
> t1:=[[0.4,11.5],[0.6,11.5],[0.5,12]]:
> t2:=[[1.4,10.5],[1.6,10.5],[1.5,11]]:
> t3:=[[2.4,9.5],[2.6,9.5],[2.5,10]]:
> t4:=[[3.4,8.5],[3.6,8.5],[3.5,9]]:
> t5:=[[-0.4,12.5],[-0.6,12.5],[-0.5,13]]:
> t6:=[[-1.4,13.5],[-1.6,13.5],[-1.5,14]]:
> X:=polygonplot((c),color=red):Y:=polygonplot((l1),color=green):Z:=
  polygonplot((l2),color=blue): K:=polygonplot((l3),color=pink):W:=
  polygonplot((l4),color=brown):M:=plot(p1):N:=plot(p2):P:=plot(p3):Q:=plot
  (p4):E:=polygonplot((t1),color=green):U:=polygonplot((t2),color=blue):
  S:=polygonplot((t3),color=pink):R:=polygonplot((t4),color=brown):T:=
  polygonplot((l5),color=yellow): J:=polygonplot((l6),color=gray):H:=plot
  (p5):G:=plot(p6):F:=polygonplot((t5),color=yellow):  C:=polygonplot((t6),
  color=gray):
> display(X,Y,Z,K,W,M,N,P,Q,E,U,S,R,T,J,H,G,F,C);
```




```
> restart;with(plots):# Robo:
> #Henri Costa de Castro Filho
> with(combinat,cartprod):
> c1:=implicitplot((x-4)^2+(y-7.5)^2=0.02,x=0..8,y=1..10,color=black,
numpoints=10000,thickness=2):
```

> $c5 := implicitplot\left( (x-5)^2 + (y-7.5)^2 = 0.02, x = 0..8, y = 1..10, color = black, numpoints = 10000, thickness = 2 \right) :$

> $c10 := implicitplot\left( (x-4.5)^2 + (y-7)^2 = 0.01, x = 0..8, y = 1..10, color = black, numpoints = 10000, thickness = 2 \right) :$

```
> A:=[[3,0],[3,0.5],[3.5,0.5],[3.5,3],[4,3],[4,0],[3,0]]:
> c2:=polygonplot(A,axes=boxed):
```

> $B := [[6, 0], [6, 0.5], [5.5, 0.5], [5.5, 3], [5, 3], [5, 0], [6, 0]] :$

> $c3 := polygonplot(B, axes = boxed) :$

> $C := [[3, 3], [3, 6], [6, 6], [6, 3], [3, 3]] :$

> $c4 := polygonplot(C, axes = boxed) :$

> $E := [[3, 5], [0.5, 5], [0.5, 5.5], [0, 5.5], [0, 4.5], [3, 4.5]] :$

> $c6 := polygonplot(E, axes = boxed) :$

> $F := [[6, 5], [8.5, 5], [8.5, 4], [8, 4], [8, 4.5], [6, 4.5]] :$

> $c7 := polygonplot(F, axes = boxed) :$

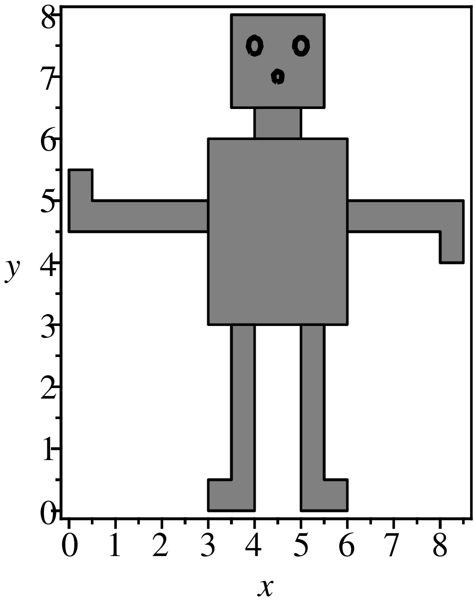
> $P := [[4, 6], [4, 6.5], [5, 6.5], [5, 6], [4, 6]] :$

> $c8 := polygonplot(P, axes = boxed) :$

> $U := [[3.5, 6.5], [3.5, 8], [5.5, 8], [5.5, 6.5], [3.5, 6.5]] :$

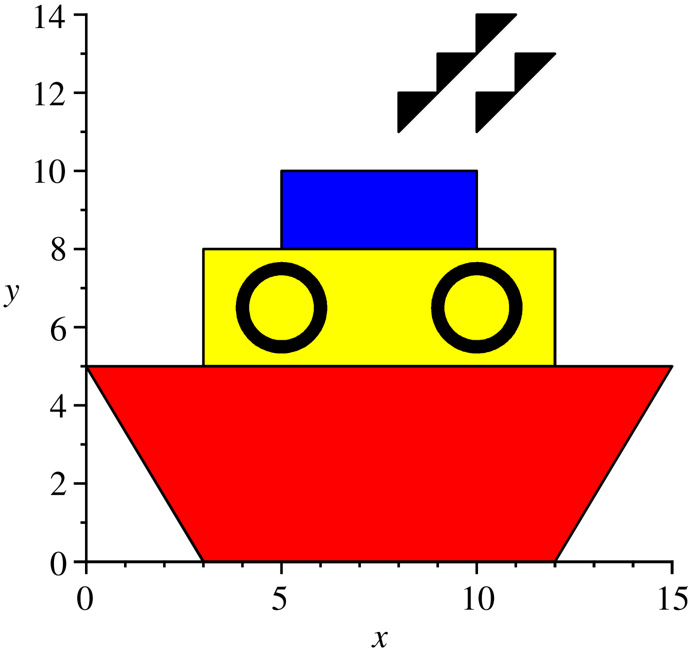
> $c9 := polygonplot(U, axes = boxed)$ :

```
> display(c1,c2,c3,c4,c7,c8,c6,c9,c5,c10);
```



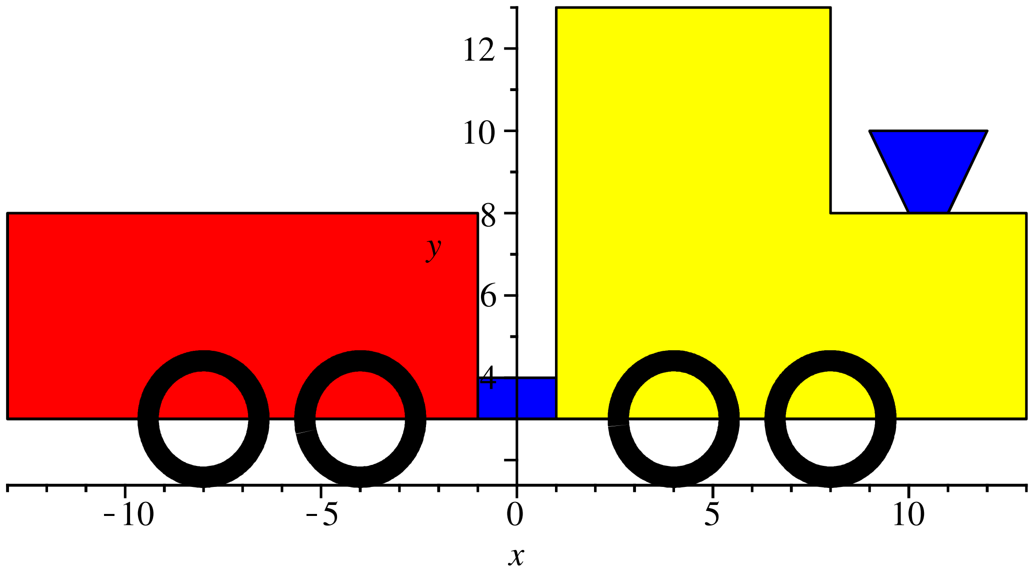

> *restart*; *with*( *plots*) :#Ana Paula

```
> A:=polygonplot({[[3,0],[0,5],[15,5],[12,0]]},color=red):
> B:=polygonplot({[[3,5],[12,5],[12,8],[3,8]]},color=yellow):
> C:=polygonplot({[[5,8],[10,8],[10,10],[5,10]]},color=blue):
> E:=polygonplot({[[8,11],[8,12],[9,12],[9,13],[10,13],[10,14],[11,14]]},
  color=black):
> F:=polygonplot({[[10,11],[10,12],[11,12],[11,13],[12,13]]},color=black):
> r1:=implicitplot((x-5)^2+(y-6.5)^2=1,x=0..14,y=-1..14,thickness=5,color=
  black,numpoints=100000):
> r2:=implicitplot((x-10)^2+(y-6.5)^2=1,x=0..14,y=-1..14,thickness=5,color=
  black,numpoints=100000):
> display(A,B,C,E,F,r1,r2);
```

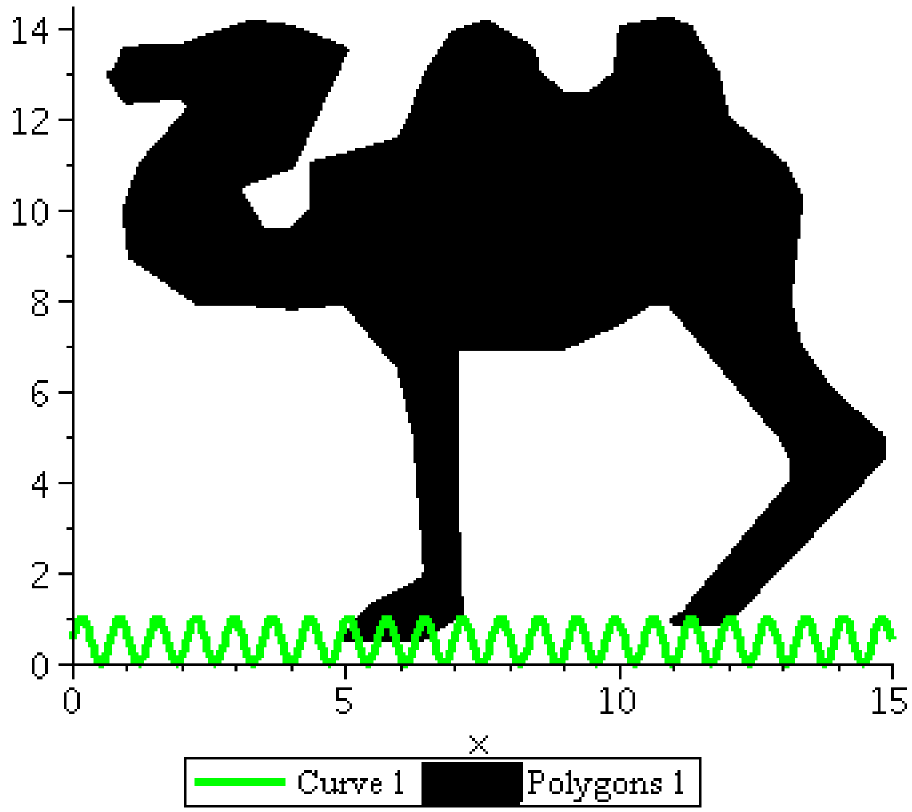


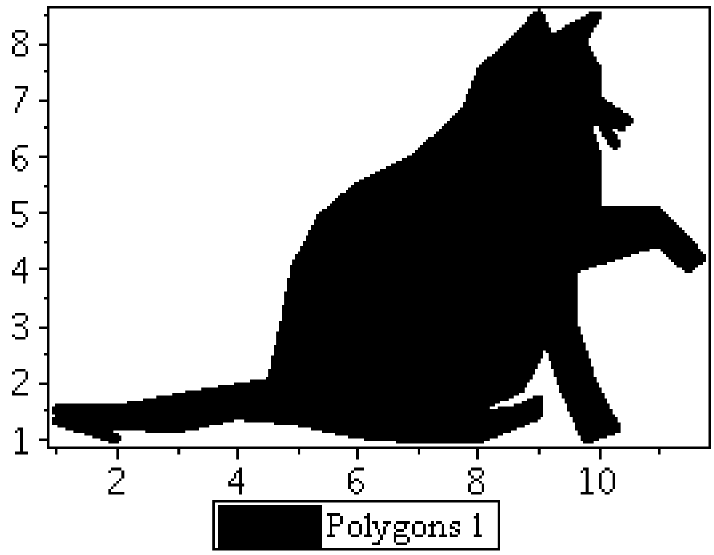

```
> restart:with(student):with(plots):
> T:=[[1,3],[1,13],[8,13],[8,8],[13,8],[13,3],[1,3]]:
```

```
> R:=[[2,8],[2,12],[6,12],[6,8],[2,8]]:
> S:=[[10,8],[9,10],[12,10],[11,8],[10,8]]:
> U:=[[-1,3],[-1,4],[1,4],[1,3],[-1,3]]:
> V:=[[-1,3],[-1,8],[-13,8],[-13,3],[-1,3]]:
> M:=polygonplot((T),color=yellow):N:=polygonplot((R),color=pink):P:=
  polygonplot((S),color=blue):Q:=polygonplot((U),color=blue):X:=polygonplot
  ((V),color=red):
> r1:=implicitplot((x-4)^2+(y-3)^2=2,x=-10..10,y=-1..12, thickness=8,
  color=black,numpoints=100000):
> r2:=implicitplot((x-8)^2+(y-3)^2=2,x=-10..10,y=-1..12, thickness=8,
  color=black,numpoints=100000):
> r3:=implicitplot((x+4)^2+(y-3)^2=2,x=-10..10,y=-1..12, thickness=8,
  color=black,numpoints=100000):
> r4:=implicitplot((x+8)^2+(y-3)^2=2,x=-10..10,y=-1..12, thickness=8,
  color=black,numpoints=100000):
> r5:=implicitplot((x-10)^2+(y-10)^2=0,x=-10..10,y=-1..12, thickness=8,
  color=black,numpoints=100000):
> display(M,N,P,Q,X,r1,r2,r3,r4,r5);
```




```
> restart:#Trabalho de Tópicos Especiais de Matemática II
  #24 de setembro de 2007; Aluna: Ariene Barcelos
  #O dono de um Zoológico recebeu a seguinte mensagem, formada pelos
  pontos:
  # - Você acabou de receber os seguintes presentes:
  #Professora: Eu me empolguei e fiz um desenho que eu adoro:
> restart:restart:with(plots):
> with(plots):k1:=[1,7]:k2:=[2,7]:k3:=[2,6]:k4:=[3,6]:k5:=[3,8]:k6:=[4,9]
  :k7:=[7,9]:k8:=[8,7]:k9:=[10,7]:k10:=[11,6]:k11:=[12,6]:k12:=[12,5]:k13:=
  [11,5]:k14:=[11,1]:k15:=[9,1]:k16:=[9,3]:k17:=[7,3]:k18:=[7,1]:k19:=[5,1]
  :k20:=[5,6]:k21:=[4,5]:k22:=[1,5]:w:=polygonplot({k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,
  k8,k9,k10,k11,k12,k13,k14,k15,k16,k17,k18,k19,k20,k21,k22,k1},axes=boxed,
  thickness=3):display(w);
```




Camelo desenhado por Rubens Miranda;     Gato desenhado por Iber

### Resolvendo Equações

```
> restart;
> eq1:=3*x-2=4;
```

$$eq1 := 3\,x-2=4$$

```
> solve(eq1,x);#resolve nos naturais ou racionais
```

$$2$$

```
> fsolve(eq1,x);#resolve nos IR
```

$$2.$$

```
> msolve(eq1,2);# módulo 2
```

$$\{x=0\}$$

```
> eq2:=5*(x-3)+4*(3*x-1)=6*x +15;
```

$$eq2 := 17\,x-19=6\,x+15$$

```
> solve(eq2,x);
```

$$\frac{34}{11}$$

```
> eq3:=abs(abs(x-4)-abs(2*x-1))-5;
```

$$eq3 := \left||x-4| - |2\,x-1|\right| - 5$$

```
> solve(eq3,x);
```

$$\frac{10}{3},\ -8$$

```
> eq4:=sqrt(2*x-3)=3*x+1;
```

$$eq4 := \sqrt{2\,x-3} = 3\,x+1$$

```
> solve(eq4,x);
```

$$-\frac{2}{9} - \frac{4}{9}\,\mathrm{I}\,\sqrt{2},\ -\frac{2}{9} + \frac{4}{9}\,\mathrm{I}\,\sqrt{2}$$

```
> fsolve(eq4,x);
```

$$fsolve\left(\sqrt{2\,x-3} = 3\,x+1,\ x\right)$$

```
> fsolve(eq4,x,complex);
```

$$-0.2222222222 + 0.6285393611\,\mathrm{I}$$

```
> eq5:=2*x^2+8*x-1;
```

$$eq5 := 2\,x^2 + 8\,x - 1$$

```
> solve(eq5,x);
```

$$-2 + \frac{3}{2}\,\sqrt{2},\ -2 - \frac{3}{2}\,\sqrt{2}$$

```
> fsolve(eq5,x);
```

$$-4.121320344,\ 0.1213203436$$

```
> eq6:=x^5-2*x^4-2*x^3+4*x^2+x-2;
```

$$eq6 := x^5 - 2\,x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 + x - 2$$

```
> solve(eq6,x);
```

$$2,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1$$

```
> fsolve(eq6,x);
```

$$-1.000000000,\ -1.000000000,\ 1.,\ 1.,\ 2.$$

```
> eq7:=cos(x)-sin(x);
```

$$eq7 := \cos(x) - \sin(x)$$

```
> solve(eq7,x);
```

$$\frac{1}{4}\,\pi$$

```
> fsolve(eq7,x);
```

$$0.7853981634$$

```
> fsolve(eq7,x,3..4);
```

$$3.926990817$$

```
> fsolve(eq7,x,-3..0);
```

$$-2.356194490$$

## Polinômios

```
> restart;
> with(PolynomialTools);
```

[*CoefficientList*, *CoefficientVector*, *GcdFreeBasis*, *GreatestFactorialFactorization*, *Hurwitz*, *IsSelfReciprocal*, *MinimalPolynomial*, *PDEToPolynomial*, *PolynomialToPDE*,

$$ShiftEquivalent, ShiftlessDecomposition, Shorten, Shorter, Sort, Split, Splits, Translate]$$

```
> P:=sum(a[k]*x^k,k=0..6);
```

$$P := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$$

```
> Q:=sum(b[k]*x^k,k=0..5);
```

$$Q := b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5$$

```
> soma:=P+Q;
```

$$soma := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5$$

```
> collect(soma,x);
```

$$a_6 x^6 + (a_5 + b_5) x^5 + (a_4 + b_4) x^4 + (b_3 + a_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0$$

```
> degree(P,x);
```

$$6$$

```
> degree(Q,x);
```

$$5$$

```
> lcoeff(P,x);
```

$$a_6$$

```
> produto:=P*Q;
```

$$produto := (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6)\ (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5)$$

```
> expand(%);
```

$$a_3 x^6 b_3 + a_2 x^6 b_4 + a_0 b_1 x + a_2 x^2 b_0 + a_0 b_5 x^5 + a_3 x^8 b_5 + a_0 b_0 + a_1 x^4 b_3 + a_1 x^6 b_5 + a_4 x^8 b_4$$
$$+ a_0 b_4 x^4 + a_1 x^3 b_2 + a_3 x^4 b_1 + a_0 b_3 x^3 + a_1 x^2 b_1 + a_4 x^5 b_1 + a_1 x b_0 + a_0 b_2 x^2 + a_3 x^5 b_2$$
$$+ a_2 x^5 b_3 + a_4 x^4 b_0 + a_3 x^3 b_0 + a_4 x^9 b_5 + a_5 x^5 b_0 + a_4 x^6 b_2 + a_2 x^4 b_2 + a_5 x^7 b_2 + a_5 x^6 b_1$$
$$+ a_2 x^3 b_1 + a_1 x^5 b_4 + a_3 x^7 b_4 + a_4 x^7 b_3 + a_2 x^7 b_5 + a_5 x^8 b_3 + a_5 x^9 b_4 + a_5 x^{10} b_5 + a_6 x^6 b_0$$
$$+ a_6 x^7 b_1 + a_6 x^8 b_2 + a_6 x^9 b_3 + a_6 x^{10} b_4 + a_6 x^{11} b_5$$

```
> collect(%,x);
```

$$a_6 x^{11} b_5 + (a_5 b_5 + a_6 b_4) x^{10} + (a_4 b_5 + a_6 b_3 + a_5 b_4) x^9 + (a_6 b_2 + a_3 b_5 + a_4 b_4 + a_5 b_3) x^8$$
$$+ (a_4 b_3 + a_5 b_2 + a_3 b_4 + a_6 b_1 + a_2 b_5) x^7 + (a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_1 b_5 + a_5 b_1 + a_4 b_2 + a_6 b_0) x^6$$
$$+ (a_3 b_2 + a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_5 b_0 + a_4 b_1) x^5 + (a_2 b_2 + a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_4 b_0) x^4$$
$$+ (a_1 b_2 + a_0 b_3 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0$$

```
> CoefficientList(soma,x);
```

$$[a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, b_3 + a_3, a_4 + b_4, a_5 + b_5, a_6]$$

```
> p:=3*x^2+5*x-5;
```

$$p := 3 x^2 + 5 x - 5$$

```
> q:=8*x^3-3*x^2+x^2+1;
```

$$q := 8 x^3 - 2 x^2 + 1$$

```
> adição:=p+q;
```

$$adição := x^2 + 5 x - 4 + 8 x^3$$

```
> produto:=p*q;
```

$$produto := (3 x^2 + 5 x - 5)\ (8 x^3 - 2 x^2 + 1)$$

```
> divisão:=q/p;# fração
```

$$divisão := \frac{8 x^3 - 2 x^2 + 1}{3 x^2 + 5 x - 5}$$

```
> quo(q,p,x);rem(q,p,x);
```

$$\frac{8}{3}x-\frac{46}{9}$$
$$-\frac{221}{9}+\frac{350}{9}x$$

```
> degree(p+q,x);
```
$$3$$

```
> lcoeff(p*q,x);
```
$$24$$

```
> tcoeff(q,x);
```
$$1$$

```
> degree(q/p,x);# não é polinômio
```
$$\mathit{FAIL}$$

```
> degree(q*p,x);
```
$$5$$

```
> degree(p/q,x);# não é polinômio
```
$$\mathit{FAIL}$$

```
> coeffs(p,x);
```
$$-5, 5, 3$$

```
> CoefficientList(5*p-3*q,x);
```
$$[-28, 25, 21, -24]$$

```
> convert(q/p,parfrac,x);
```
$$\frac{8}{3}x-\frac{46}{9}+\frac{1}{9}\,\frac{-221+350\,x}{3\,x^2+5\,x-5}$$

```
> with(student):
> completesquare(p,x);
```
$$3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{85}{12}$$

**Operaçoes com Polinômios**

```
> restart;
> with(PolynomialTools);
```
$[\mathit{CoefficientList}, \mathit{CoefficientVector}, \mathit{Hurwitz}, \mathit{IsSelfReciprocal}, \mathit{MinimalPolynomial}, \mathit{PDEToPolynomial}, \mathit{PolynomialToPDE}, \mathit{Shorten}, \mathit{Shorter}, \mathit{Sort}, \mathit{Split}, \mathit{Splits}, \mathit{Translate}]$

```
> p:=sum(a[k]*x^k,k=0..6);
```
$$p := a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+a_3\,x^3+a_4\,x^4+a_5\,x^5+a_6\,x^6$$

```
> q:=sum(b[k]*x^k,k=0..5);
```
$$q := b_0+b_1\,x+b_2\,x^2+b_3\,x^3+b_4\,x^4+b_5\,x^5$$

```
> soma:=p+q;
```
$$\mathit{soma} := a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+a_3\,x^3+a_4\,x^4+a_5\,x^5+a_6\,x^6+b_0+b_1\,x+b_2\,x^2+b_3\,x^3+b_4\,x^4+b_5\,x^5$$

```
> collect(soma,x);
```
$$a_6\,x^6+(a_5+b_5)\,x^5+(a_4+b_4)\,x^4+(b_3+a_3)\,x^3+(a_2+b_2)\,x^2+(a_1+b_1)\,x+a_0+b_0$$

```
> degree(p,x);
```

$$6$$

```
> degree(q,x);
```

$$5$$

```
> lcoeff(p,x);#coeficiente de maior grau.
```

$$a_6$$

```
> tcoeff(p,x);#coeficiente de menor grau.
```

$$a_0$$

```
> produto:=p*q;
```

$$produto := q$$

```
> expand(%);
```

$$q$$

```
> collect(%,x);
```

$$q$$

```
> CoefficientList(soma,x);
```

$$[soma]$$

```
> a:=3*x^2+5*x-5;
```

$$a := 3\,x^2 + 5\,x - 5$$

```
> b:=8*x^3-3*x^2+x^2+1;
```

$$b := 8\,x^3 - 2\,x^2 + 1$$

```
> adição:=a+b;
```

$$adição := x^2 + 5\,x - 4 + 8\,x^3$$

```
> produto:=a*b;
```

$$produto := \left(3\,x^2 + 5\,x - 5\right)\left(8\,x^3 - 2\,x^2 + 1\right)$$

```
> expand(%);
```

$$24\,x^5 + 34\,x^4 + 13\,x^2 - 50\,x^3 + 5\,x - 5$$

```
> divisão:=b/a;#fração
```

$$divisão := \frac{8\,x^3 - 2\,x^2 + 1}{3\,x^2 + 5\,x - 5}$$

```
> quo(b,a,x);#quociente
```

$$\frac{8}{3}\,x - \frac{46}{9}$$

```
> rem(b,a,x);#RESTO
```

$$-\frac{221}{9} + \frac{350}{9}\,x$$

```
> convert(b/a, parfrac,x);
```

$$\frac{8}{3}\,x - \frac{46}{9} + \frac{1}{9}\,\frac{-221 + 350\,x}{3\,x^2 + 5\,x - 5}$$

```
> expand(%);
```

$$\frac{8\,x^3}{3\,x^2 + 5\,x - 5} - \frac{2\,x^2}{3\,x^2 + 5\,x - 5} + \frac{1}{3\,x^2 + 5\,x - 5}$$

```
> degree(a+b,x);
```

$$3$$

```
> lcoeff(a*b,x);
```

$$24$$

```
> tcoeff(b,x);
```

$$1$$

```
> degree(a*b,x);
```

$$5$$

```
> degree(b/a,x);#NÃO É POLINOMIO
```

$$FAIL$$

```
> degree(a/b,x);#NÃO É POLINOMIO
```

$$FAIL$$

```
> coeffs(a,x);
```

$$-5, 3, 5$$

```
> CoefficientList(5*a-3*q,x);
```

$$[5\,a - 3\,q]$$

```
> with(student);
```

$$[D, \mathit{Diff}, \mathit{Doubleint}, \mathit{Int}, \mathit{Limit}, \mathit{Lineint}, \mathit{Product}, \mathit{Sum}, \mathit{Tripleint}, \mathit{changevar}, \mathit{completesquare}, \mathit{distance}, \mathit{equate}, \mathit{integrand}, \mathit{intercept}, \mathit{intparts}, \mathit{leftbox}, \mathit{leftsum}, \mathit{makeproc}, \mathit{middlebox}, \mathit{middlesum}, \mathit{midpoint}, \mathit{powsubs}, \mathit{rightbox}, \mathit{rightsum}, \mathit{showtangent}, \mathit{simpson}, \mathit{slope}, \mathit{summand}, \mathit{trapezoid}]$$

```
> completesquare(a,x);
```

$$3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{85}{12}$$

## Equações não lineares

```
> restart;
> eq:=3*x-8=5;#esta é linear
```

$$eq := 3\,x - 8 = 5$$

```
> solve(eq,x);solve(eq,{x});
```

$$\frac{13}{3}$$

$$\left\{x = \frac{13}{3}\right\}$$

```
> eq1:=3*x^2-8*x=5;#não linear, de grau 2
```

$$eq1 := 3\,x^2 - 8\,x = 5$$

```
> solve(eq1,{x});
```

$$\left\{x = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{31}\right\}, \left\{x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{31}\right\}$$

```
> eq2:=log[2](9^(x-1)+7)-log[2](3^(x+1)+1)=2;#eq. logaritmica
```

$$eq2 := \frac{\ln(9^{x-1} + 7)}{\ln(2)} - \frac{\ln(3^{x+1} + 1)}{\ln(2)} = 2$$

```
> solve(eq2,{x});
```

$$\left\{x = \frac{\ln(54 - 3\sqrt{321})}{\ln(3)}\right\}, \left\{x = \frac{\ln(54 + 3\sqrt{321})}{\ln(3)}\right\}$$

```
> eq3:=log[x](3*x^2-13*x+15)=2;
```

$$eq3 := \frac{\ln(3\,x^2 - 13\,x + 15)}{\ln(x)} = 2$$

```
> solve(eq3,{x});
```

$$\left\{x = \frac{3}{2}\right\}, \{x = 5\}$$

```
> eq4:=sin(3*x)*cos(3*x)=tan(3*x);solve(eq4,{x});#eq. trigonométrica
```

$$eq4 := \sin(3\,x)\,\cos(3\,x) = \tan(3\,x)$$

$$\{x = 0\}$$

**Sistemas**

```
> restart;
> eqS1:=x+y=1;
```

$$eqS1 := x + y = 1$$

```
> eqS2:=x-y=4;
```

$$eqS2 := x - y = 4$$

```
> solve({eqS1,eqS2});# 1ª maneira
```

$$\left\{y = -\frac{3}{2},\, x = \frac{5}{2}\right\}$$

```
> solve({x+y=1,x-y=4},{x,y});# 2ª maneira
```

$$\left\{y = -\frac{3}{2},\, x = \frac{5}{2}\right\}$$

```
> solve({x+2*y+3*z,5*x-2*y=1,2*x-y+5*z=-6});
```

$$\left\{z = -\frac{11}{9},\, x = \frac{7}{9},\, y = \frac{13}{9}\right\}$$

```
> solve({x+y=6,log[2](x)+log[2](4)=log[2](8)});
```

$$\{y = 4,\, x = 2\}$$

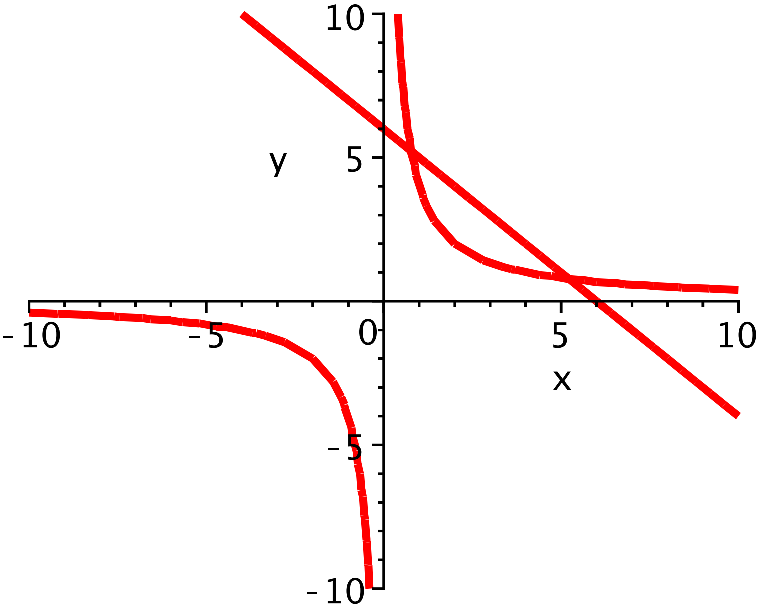
```
> solve({x + y=6, x*y=4},{x,y});evalf(%);
```

$$\{y = 2\,RootOf(\_Z^2 - 3\,\_Z + 1, label = \_L2),\, x = -2\,RootOf(\_Z^2 - 3\,\_Z + 1, label = \_L2) + 6\}$$

$$\{x = 5.236067977,\, y = 0.7639320226\}$$

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> implicitplot({x+y=6,x*y=4},x=-10..10,y=-10..10);
```




```
> solve(x*(6-x)=4,{x});
```

$$\{x = 3 - \sqrt{5}\},\, \{x = 3 + \sqrt{5}\}$$

```
> x1:=3-sqrt(5); y1:= 6-x1;
```

$$x1 := 3 - \sqrt{5}$$
$$y1 := 3 + \sqrt{5}$$

```
> x2:=3+sqrt(5); y2:= 6-x2;
```

$$x2 := 3 + \sqrt{5}$$
$$y2 := 3 - \sqrt{5}$$

```
> solve({x^2 + 2*y + 3*z=7, 5*x -2*y=1, 2*x -y + 5*z =-6});
```

$$\{y = -18, x = -7, z = -2\}, \left\{z = -\frac{113}{100}, x = \frac{17}{10}, y = \frac{15}{4}\right\}$$

```
> solve({x^2 + 2*y + 3*z=7, 5*x -2*(y^2)=1, 2*x -y + 5*z =-6});evalf(%);
```

$$\left\{y = -\frac{5}{13}\,\mathit{RootOf}\left(427\,\_Z + 50\,\_Z^4 - 120\,\_Z^3 - 988\,\_Z^2 + 5787, \mathit{label} = \_L4\right)^2 + \frac{6}{13}\,\mathit{RootOf}\left(427\,\_Z + 50\,\_Z^4 - 120\,\_Z^3 - 988\,\_Z^2 + 5787, \mathit{label} = \_L4\right) + \frac{53}{13}, x = \mathit{RootOf}\left(427\,\_Z + 50\,\_Z^4 - 120\,\_Z^3 - 988\,\_Z^2 + 5787, \mathit{label} = \_L4\right), z = -\frac{4}{13}\,\mathit{RootOf}\left(427\,\_Z + 50\,\_Z^4 - 120\,\_Z^3 - 988\,\_Z^2 + 5787, \mathit{label} = \_L4\right) - \frac{1}{13}\,\mathit{RootOf}\left(427\,\_Z + 50\,\_Z^4 - 120\,\_Z^3 - 988\,\_Z^2 + 5787, \mathit{label} = \_L4\right)^2 - \frac{5}{13}\right\}$$

$$\{z = -1.782724184, x = 2.709077870, y = 2.504534822\}$$

```
> solve({x + 2*y + 3*z=7, 5*x -2*y=1, 2*x -y -5*(z^2) =-6});evalf(%);
```

$$\left\{x = \frac{1}{3}\,\mathit{RootOf}\left(-317\,\_Z + 523 + 40\,\_Z^2, \mathit{label} = \_L7\right), y = \frac{5}{6}\,\mathit{RootOf}\left(-317\,\_Z + 523 + 40\,\_Z^2, \mathit{label} = \_L7\right) - \frac{1}{2}, z = -\frac{2}{3}\,\mathit{RootOf}\left(-317\,\_Z + 523 + 40\,\_Z^2, \mathit{label} = \_L7\right) + \frac{8}{3}\right\}$$

$$\{x = 0.7806269683, y = 1.451567421, z = 1.105412730\}$$

```
> eq:=x^2 -2*x - log[2](a)=0;   #a?
```

$$eq := x^2 - 2\,x - \frac{\ln(a)}{\ln(2)} = 0$$

```
> solve(eq,a);
```

$$e^{x^2 \ln(2) - 2\,x \ln(2)}$$

## Inequações

```
> restart;
> solve(3*x-8>5,x);
```

$$\mathit{RealRange}\left(\mathit{Open}\left(\frac{13}{3}\right), \infty\right)$$

```
> solve(3*x-8>=5,x);
```

$$\mathit{RealRange}\left(\frac{13}{3}, \infty\right)$$

```
> solve(3*x-8>=5,x);
```

$$\mathit{RealRange}\left(\frac{13}{3}, \infty\right)$$

```
> solve(3*x^2-8*x<5,x);
```

$$RealRange\left(Open\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{31}\right), Open\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{31}\right)\right)$$

```
> solve(3*x^2-8*x>=3*x+25,x);
```

$$RealRange\left(-\infty, \frac{11}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{421}\right), RealRange\left(\frac{11}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{421}, \infty\right)$$

```
> solve(9^x>3^x + 3^(x+1),x);
> solve(9^x - 5*3^x + 6 <=0,x);
> solve(log[10](3210) < log[10](10^x),x);
```

$$RealRange\left(Open\left(\frac{\ln(3210)}{\ln(10)}\right), \infty\right)$$

```
> solve(log[1/3](abs(log[2](x))) <0,x);
```

$$RealRange(Open(2), \infty), RealRange\left(Open(0), Open\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

```
> solve(log[2](sqrt(6*x+1)) + log[2](sqrt(x+1)) > log[4](3),x);
```

$$RealRange\left(Open\left(-\frac{7}{12}+\frac{1}{12}\sqrt{97}\right), \infty\right)$$

Resolver as inequações:

```
> restart;
> 3*(1-x)+7*x<33-4*(5-2*x);
```

$$4x < 10 + 8x$$

```
> solve((%),{x});
```

$$\left\{-\frac{5}{2} < x\right\}$$

```
> -4<2-3*x and 2-3*x<=17;
```

$$3x < 6 \text{ and } -15 - 3x \leq 0$$

```
> solve((%),{x});
```

$$\{-5 \leq x, x < 2\}$$

```
> x^3>=4*x;
```

$$4x \leq x^3$$

```
> solve((%),{x});
```

$$\{-2 \leq x, x \leq 0\}, \{2 \leq x\}$$

```
> (x^3-2*x^2+x)/(x^2+1)*(x-4)<=x;
```

$$\frac{(x^3 - 2x^2 + x)(x-4)}{x^2+1} \leq x$$

```
> solve((%),{x});
```

$$\left\{x \leq \frac{1}{3}\left(127+3\sqrt{609}\right)^{1/3} + \frac{22}{3\left(127+3\sqrt{609}\right)^{1/3}} + \frac{7}{3}, 0 \leq x\right\}$$

Inequações com 2 variáveis

```
> restart;
> with(plots):
> d1:=x+y>1;
```

$$d1 := 1 < x + y$$

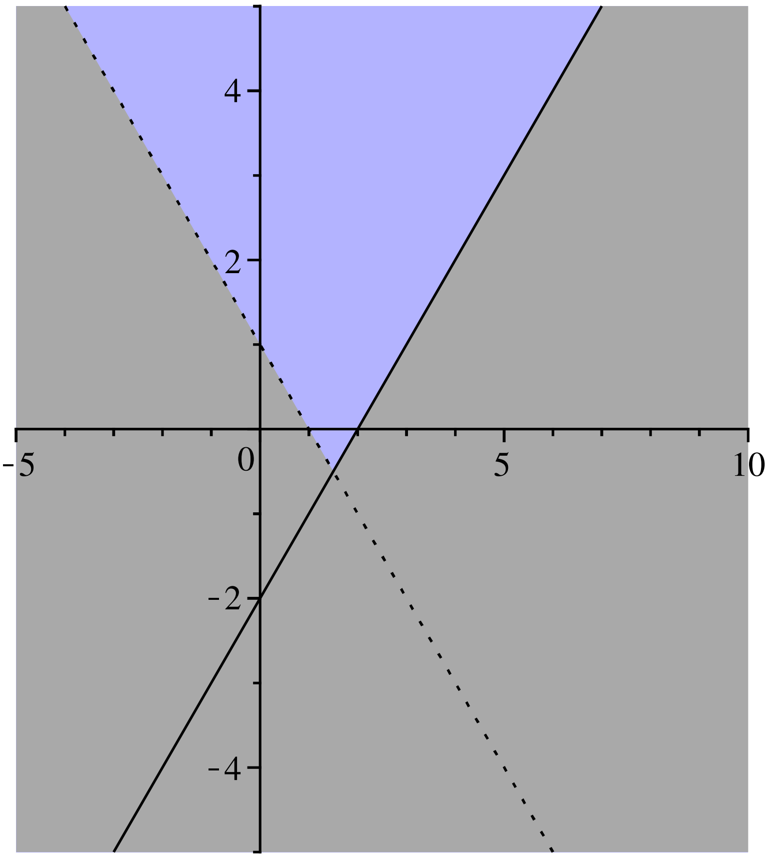
```
> d2:=x-y<=2;
```

$$d2 := x - y \leq 2$$

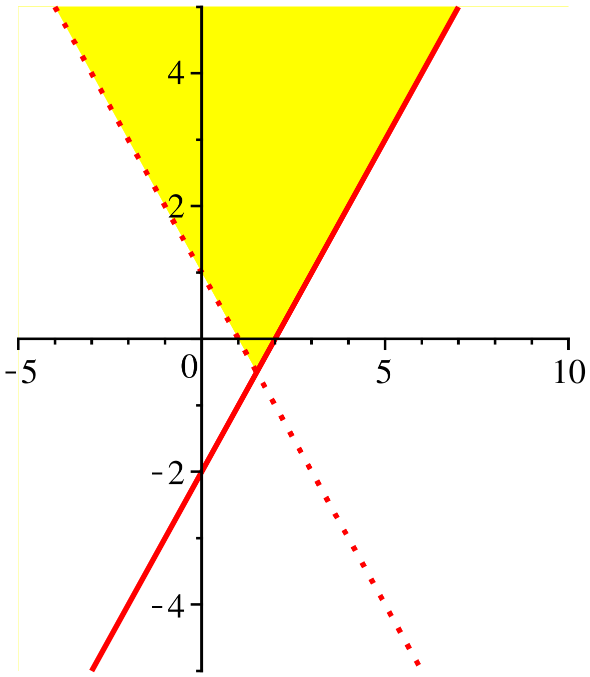
```
> solve({d1,d2});
```

$$\left\{x \leq \frac{3}{2}, -x+1 < y\right\}, \left\{-2+x \leq y, \frac{3}{2} < x\right\}$$

```
> inequal({d1,d2},x=-5..10,y=-5..5);# O triângulo abaixo foi
  formado por duas retas, -x-y+1<0 e x-y-2<=0, que são os
  valores que x e y podem assumir.
```




```
> inequal({d1,d2},x=-5..10,y=-5..5,color=red,thickness=2,
  optionsexcluded=(color=white),optionsfeasible=(color=yellow))
  ;# O mesmo gráfico, porém com uma melhor visualização
```




```
> d6:=x<3;
```

$$d6 := x < 3$$

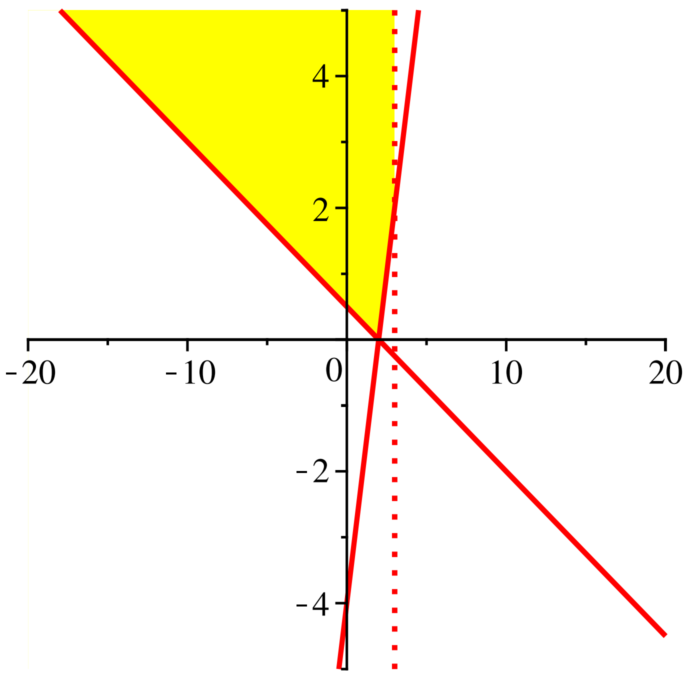
```
> d9:=x+4*y>=2;
```

$$d9 := 2 \leq x + 4\,y$$

```
> d5:=2*x-y<=4;
```

$$d5 := 2\,x - y \leq 4$$

```
> inequal({d6,d9,d5},x=-20..20,y=-5..5,color=red,thickness=2,
optionsexcluded=(color=white),optionsfeasible=(color=yellow)
);
```



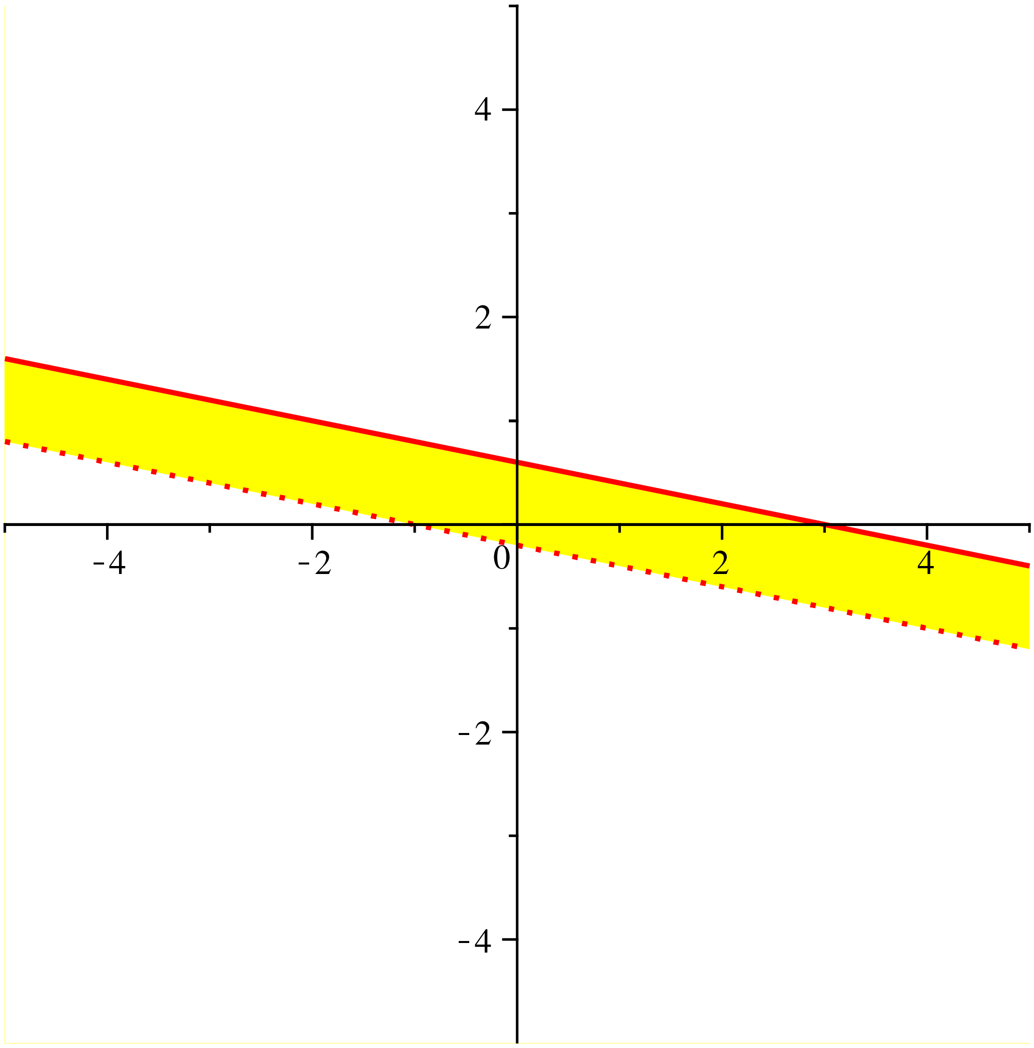

```
> i1:=x+5*y>-1;
```

$$i1 := -1 < x + 5\,y$$

```
> i2:=x+5*y<=3;
```

$$i2 := x + 5\,y \le 3$$

```
> inequal({i1,i2},x=-5..5,y=-5..5,color=red,thickness=2,optionsexcluded=
  (color=white),optionsfeasible=(color=yellow));
```




```
> i4:=x+y<=1;
```

$$i4 := x + y \le 1$$

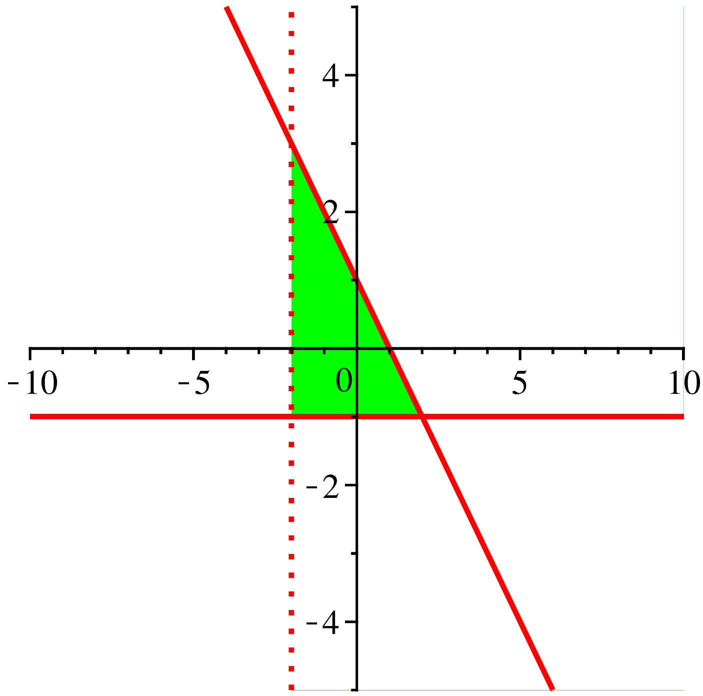
```
> i5:=x>-2;
```

$$i5 := -2 < x$$

```
> i6:=y>=-1;
```

$$i6 := -1 \le y$$

```
> inequal({i5,i4,i6},x=-10..10,y=-5..5,color=red,thickness=2,
  optionsexcluded=(color=white),optionsfeasible=(color=green));
```



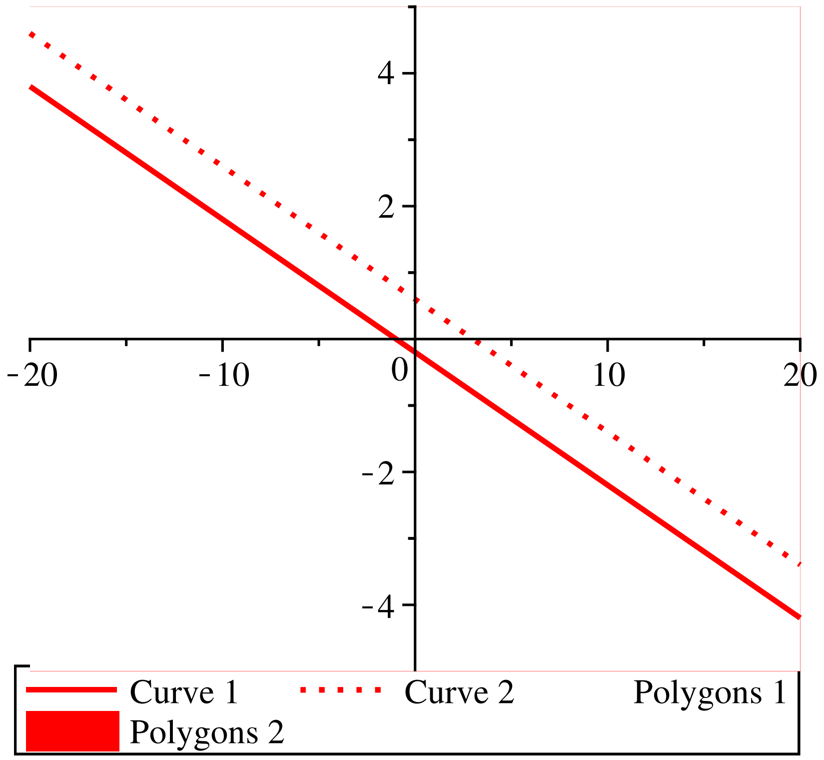

```
> i9:=x+5*y>3;
```

$$i9 := 3 < x + 5\,y$$

```
> i10:=x+5*y<=-1;
```

$$i10 := x + 5\,y \leq -1$$

```
> inequal({i10,i9},x=-20..20,y=-5..5,color=red,thickness=2,
  optionsexcluded=(color=white),optionsfeasible=(color=red));#
  Agora os valores que x e y podem assumir estão fora do
  intervalo entre as duas retas.
```



## Binômio de Newton. Triângulo de Pascal

(x + y)^n,; n é um número natural

Triângulo de Pascal: coef (x + 1)^n

```
> B:=(2*x-3*y)^4;# determine o 3° termo
```

$$B := (2\,x - 3\,y)^4$$

```
> expand(%);
```

$$16\,x^4 - 96\,x^3\,y + 216\,x^2\,y^2 - 216\,x\,y^3 + 81\,y^4$$

```
> qto:=6*(2*x)^2*(3*y)^2;
```

$$qto := 216\,x^2\,y^2$$

```
> C:=(3*x*z^2-8/y*w^3)^15;#determine o 14ª termo
```

$$C := \left(3\,x\,z^2 - \frac{8\,w^3}{y}\right)^{15}$$

```
> C14:=(15!/13!*2!)*(3*x*z^2)^2*(-8*w^3/y)^13;
```

$$C14 := -\frac{2078076976496640\,x^2\,z^4\,w^{39}}{y^{13}}$$

```
> E:=((x+1/x)*(x-1/x))^6; # encontre o termo independente de x;
```

$$E := \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 \left(x - \frac{1}{x}\right)^6$$

```
> E:=(x^2-1/x^2)^6;
```

$$E := \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^6$$

```
> expand(E);# resposta: -20
```

$$x^{12} - 6\,x^8 + 15\,x^4 - 20 + \frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^8} + \frac{1}{x^{12}}$$

### Triângulo de Pascal

```
> restart;
> with(PolynomialTools);
```

[*CoefficientList*, *CoefficientVector*, *Hurwitz*, *IsSelfReciprocal*, *MinimalPolynomial*, *PDEToPolynomial*, *PolynomialToPDE*, *Shorten*, *Shorter*, *Sort*, *Split*, *Splits*, *Translate*]

```
> p:=(x+1)^n;
```

$$p := (x + 1)^n$$

```
> CoefficientList(p,x);
Error, (in CoefficientVector) unexpected argument, n = 0, checking type, polynom
```

```
> coeffs(p);
```

1

```
> for n from 0 to 20 do
> CoefficientList(p,x);
> end do;
```

[1, 1]

[1, 2, 1]

[1, 3, 3, 1]

[1, 4, 6, 4, 1]

[1, 5, 10, 10, 5, 1]

[ 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 ]
[ 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 ]
[ 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1 ]
[ 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1 ]
[ 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 ]
[ 1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1 ]
[ 1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1 ]
[ 1, 13, 78, 286, 715, 1287, 1716, 1716, 1287, 715, 286, 78, 13, 1 ]
[ 1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1 ]
[ 1, 15, 105, 455, 1365, 3003, 5005, 6435, 6435, 5005, 3003, 1365, 455, 105, 15, 1 ]
[ 1, 16, 120, 560, 1820, 4368, 8008, 11440, 12870, 11440, 8008, 4368, 1820, 560, 120, 16, 1 ]
[ 1, 17, 136, 680, 2380, 6188, 12376, 19448, 24310, 24310, 19448, 12376, 6188, 2380, 680, 136, 17, 1 ]
[ 1, 18, 153, 816, 3060, 8568, 18564, 31824, 43758, 48620, 43758, 31824, 18564, 8568, 3060, 816, 153, 18, 1 ]
[ 1, 19, 171, 969, 3876, 11628, 27132, 50388, 75582, 92378, 92378, 75582, 50388, 27132, 11628, 3876, 969, 171, 19, 1 ]
[ 1, 20, 190, 1140, 4845, 15504, 38760, 77520, 125970, 167960, 184756, 167960, 125970, 77520, 38760, 15504, 4845, 1140, 190, 20, 1 ]

**Relações e Funções**

Dados dois conjuntos A e B não vazios , chama-se função (ou aplicação) de A em B, representada por f : A -> B ; y = f(x) , a qualquer relação binária que associa a cada elemento de A , um único elemento de B .Portanto , para que uma relação de A em B seja uma função , exige-se que a cada x Î A esteja associado um único y Î B , podendo entretanto existir y Î B que não esteja associado a nenhum elemento pertencente a A .

Obs : na notação y = f(x) , entendemos que y é imagem de x pela função f, ou seja: y está associado a x através da função f.

Ex : f(x) = 4x+3 ; então f(2) = 4.2 + 3 = 11 e portanto , 11 é imagem de 2 pela função f ;
f(5) = 4.5 + 3 = 23 , portanto 23 é imagem de 5 pela função f , etc.
Para definir uma função , necessitamos de dois conjuntos (Domínio e Contradomínio ) e de uma fórmula ou uma lei que relacione cada elemento do domínio a um e somente um elemento do contradomínio .

**Tipos de Funções.**

- **Função sobrejetora** : é aquela cujo conjunto imagem é igual ao contradomínio .
- **Função injetora :** uma função y = f(x) é injetora quando elementos distintos do seu domínio , possuem imagens distintas , isto é : x1 <> x2 -> f(x1) <> f(x2) .
- **Função bijetora** : uma função é dita bijetora , quando é ao mesmo tempo , injetora e sobrejetora .

**Função Inversa.**

Dada uma função f : A ® B , se f é bijetora , então define-se a função inversa f -1 como sendo a função de B em A , tal que f -1 (y) = x . É óbvio então que :
a) para obter a função inversa , basta permutar as variáveis x e y .
b) o domínio de f -1 é igual ao conjunto imagem de f .
c) o conjunto imagem de f -1 é igual ao domínio de f .
d) os gráficos de f e de f -1 são curvas simétricas em relação à reta y = x ou seja , à bissetriz do primeiro quadrante .
e) f (f -1(x) ) = f -1 (f(x)) = x.

**Função Composta.**

Chama-se função composta ( ou função de função ) à função obtida substituindo-se a variável independente x , por uma função .

Simbologia : fog (x) = f(g(x)) ou gof (x) = g(f(x)) .
Obs : atente para o fato de que fog ¹ gof ( a operação " composição de funções " não é comutativa , isto é , o resultado depende da ordem de colocação das funções ) .

```
> restart;with(plots):
```

**FUNÇÃO CONSTANTE.**

Uma função é dita constante quando é do tipo f(x) = k , onde k não depende de x .
Exemplos:
a) f(x) = 5
b) f(x) = -3
Obs : o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo dos x .

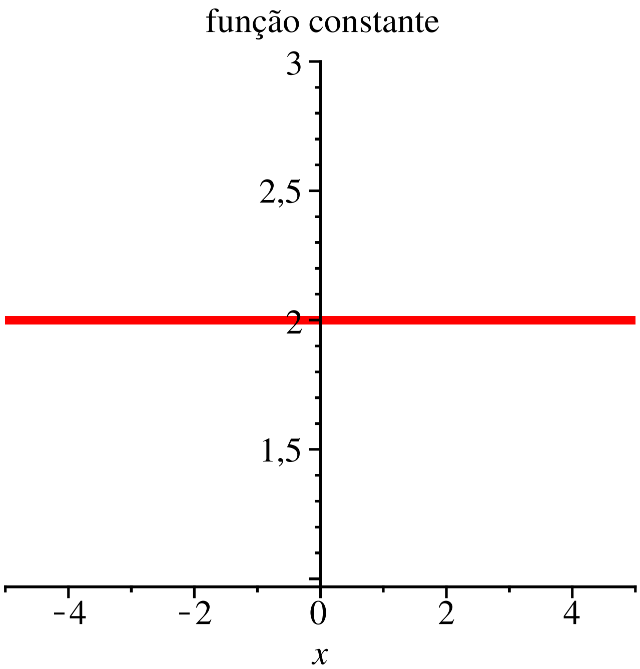
```
> c:=2;
```

$$c := 2$$

```
> f1:=x -> c;
```

$$f1 := x \rightarrow c$$

```
> plot(f1(x),x=-5..5,title="função constante");
```



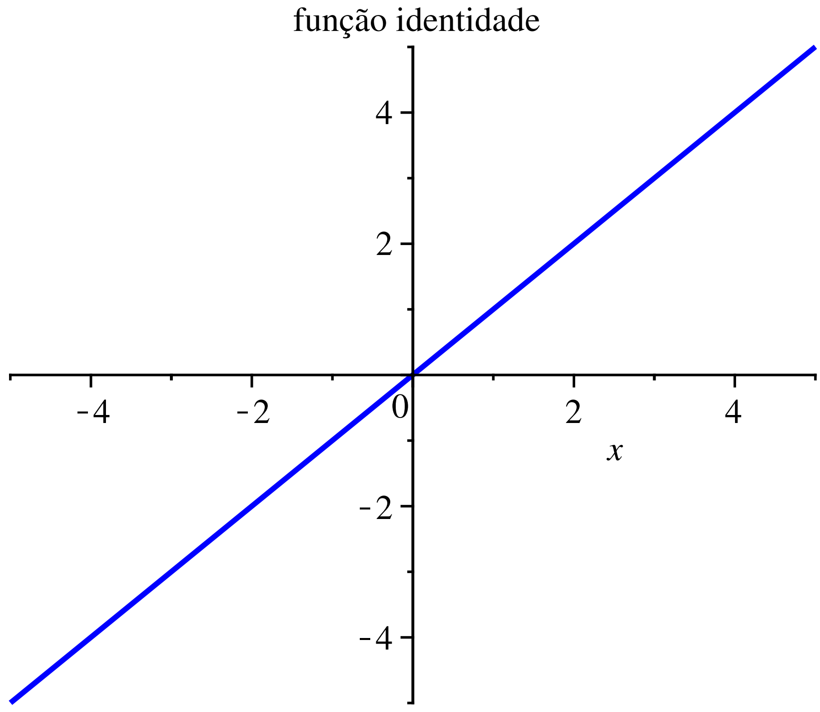

**FUNÇÃO DO 1º GRAU.**

Uma função é dita do 1º grau , quando é do tipo f(x) = ax + b , onde a <>0 .
**Propriedades:**
1) o gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma reta .
2) na função f(x) = ax + b , se b = 0 , f é dita linear e se b ¹ 0 f é dita afim .
3) o gráfico intercepta o eixo dos x na raiz da equação f(x) = 0 .
4) o gráfico intercepta o eixo dos y no ponto (0 , b) , onde b é chamado coeficiente linear .
5) o valor a é chamado coeficiente angular e dá a inclinação da reta .
6) se a > 0 , então f é crescente .
7) se a < 0 , então f é decrescente .
8) quando a função é linear ( f(x) = ax ) , o gráfico é uma reta que sempre passa na origem.

```
> f2:=x -> x;
```

$$f2 := x \rightarrow x$$

```
> plot(f2(x),x=-5..5,color=blue,thickness=2,title="função identidade");
```



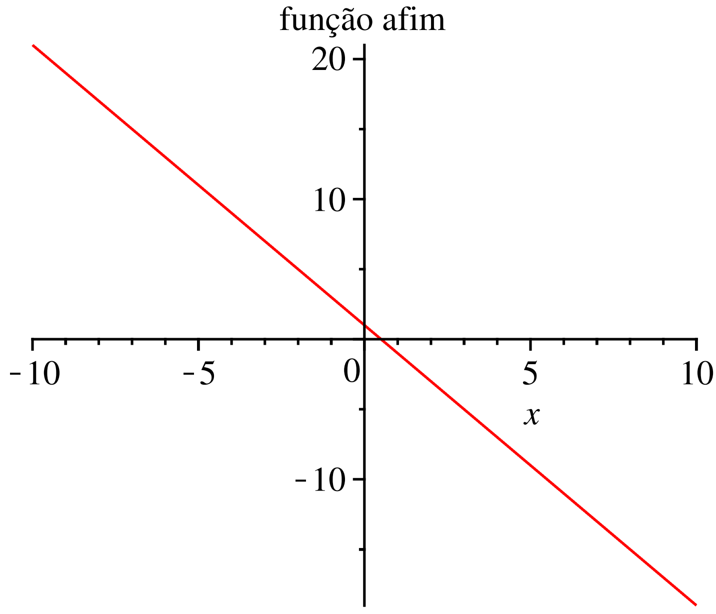

```
> a:=-2;b:=1;
```

$$a := -2$$
$$b := 1$$

```
> f3:= x-> a*x +b;
```

$$f3 := x \rightarrow a\,x + b$$

```
> plot(f3(x),x=-10..10,title="função afim",numpoints=50000);
```




**FUNÇÃO DO 2º GRAU.**

Uma função é dita do 2º grau quando é do tipo f(x) = ax2 + bx + c , com a <> 0. O grafico é sempre uma parabola.

**Propriedades:**
1) se a > 0 a parábola tem um ponto de mínimo .
2) se a < 0 a parábola tem um ponto de máximo
3) o vértice da parábola é o ponto V(xv , yv) onde xv = - b/2a e yv = - D /4a onde
D = b2 - 4ac .
4) a parábola intercepta o eixo dos x nos pontos de abcissas x’ e x’’ , que são as raízes da
equação ax2 + bx + c = 0 .
5) a parábola intercepta o eixo dos y no ponto (0 , c) .
6) o eixo de simetria da parábola é uma reta vertical de equação x = - b/2a.

7) ymax = - D /4a ( a < 0 )
8 ) ymin = - D /4a ( a > 0 )
9) Im(f) = { y Î R ; y ³ - D /4a } ( a > 0 )
10) Im(f) = { y Î R ; y £ - D /4a} ( a < 0)
11) Forma fatorada : sendo x1 e x2 as raízes da de f(x) = ax2 + bx + c , então ela pode ser escrita na forma fatorada a seguir :
y = a(x - x1).(x - x2)

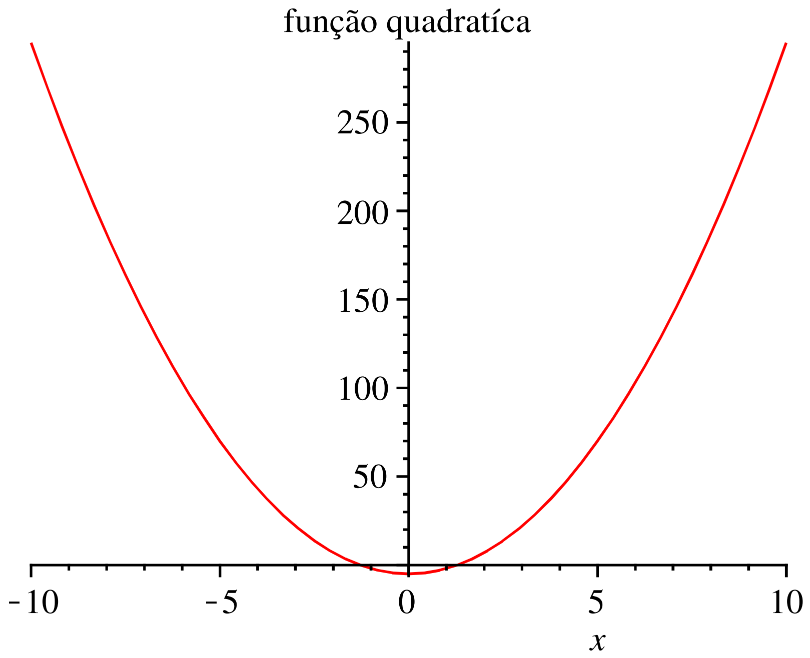
```
> a:=3;b:=0;c:=-5;
```

$$a := 3$$
$$b := 0$$
$$c := -5$$

```
> f4:=x -> a*x^2 +b*x +c;
```

$$f4 := x \rightarrow a\,x^2 + b\,x + c$$

```
> plot(f4(x),x=-10..10,title="função quadratíca");
```



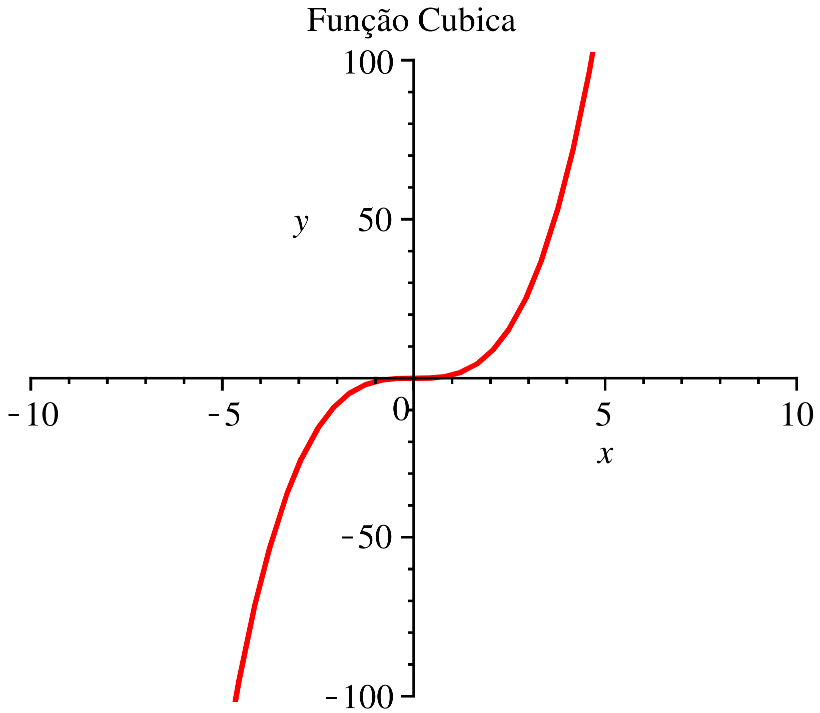

**FUNÇÃO CÚBICA.**

Uma função do tipo f(x) = ax3 + bx2 + cx + d, com a > 0 é uma função polinomial chamada função cúbica.
O gráfico de uma função cúbica é uma curva que pode apresentar pontos de máximos e mínimos. O domínio e a imagem é sempre o conjunto dos números reais. Os valores para os quais f(x)=0, recebem o nome de zeros da função cúbica. Uma função de grau 3, tem exatamente 3 raízes reais ou complexas, (com no mínimo uma raiz real), desde que cada raiz seja contada de acordo com sua multiplicidade. O termo independente determina a interseção com o eixo y.

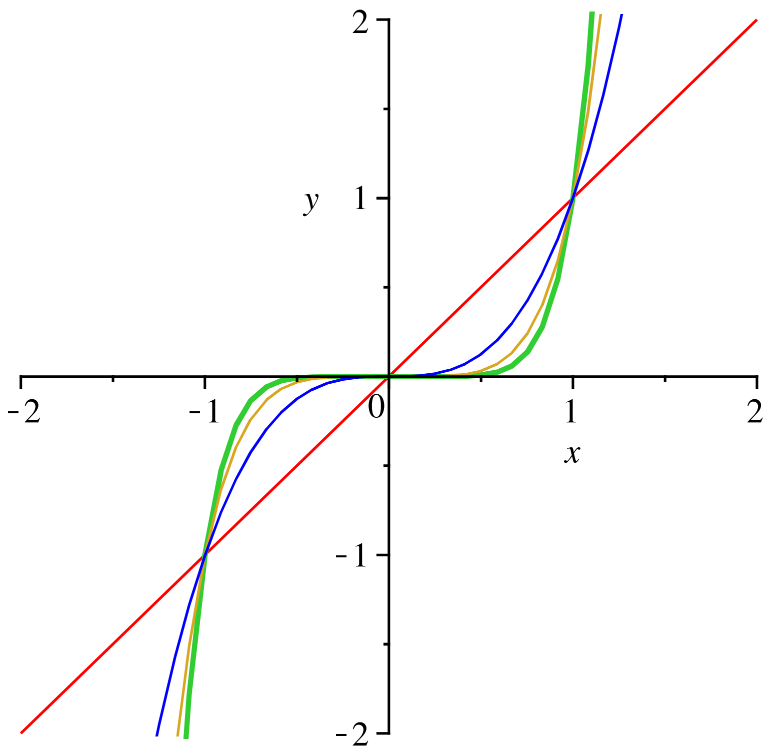
```
> f5:=x -> x^3;
```

$$f5 := x \rightarrow x^3$$

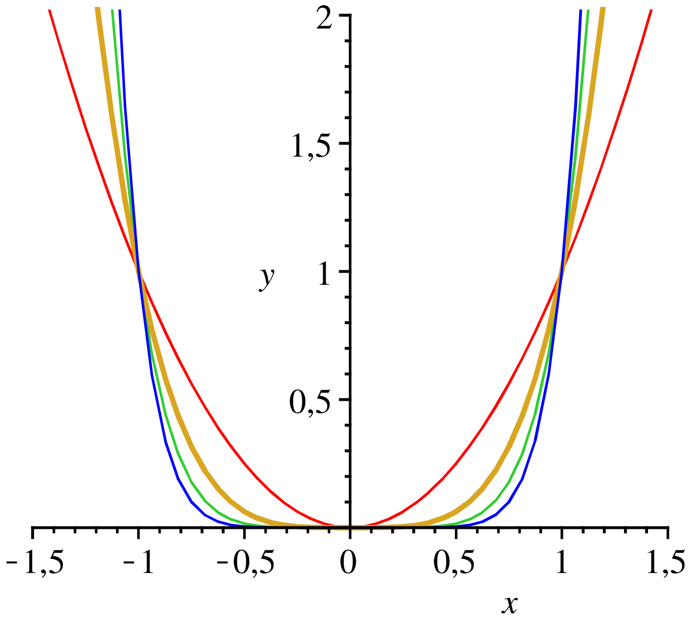
```
> plot(f5(x),x=-10..10,y=-100..100, title="Função Cubica");
```




```
> plot({x,x^3,x^5,x^7},x=-2..2,y=-2..2);#funções ímpares
```




```
> plot({x^2,x^4,x^6,x^8},x=-1.5..1.5,y=0..2);#funções pares
```




**Funcão Modular ou Valor absoluto**

Se  x é um número real qualquer, então:  !x!= x se x>0, -x se x<0.

O valor absoluto de um número x é a sua distância até a origem, independentemente de sua direção. Em geral |a - b| é a distância entre a e b independentemente de sua direção.

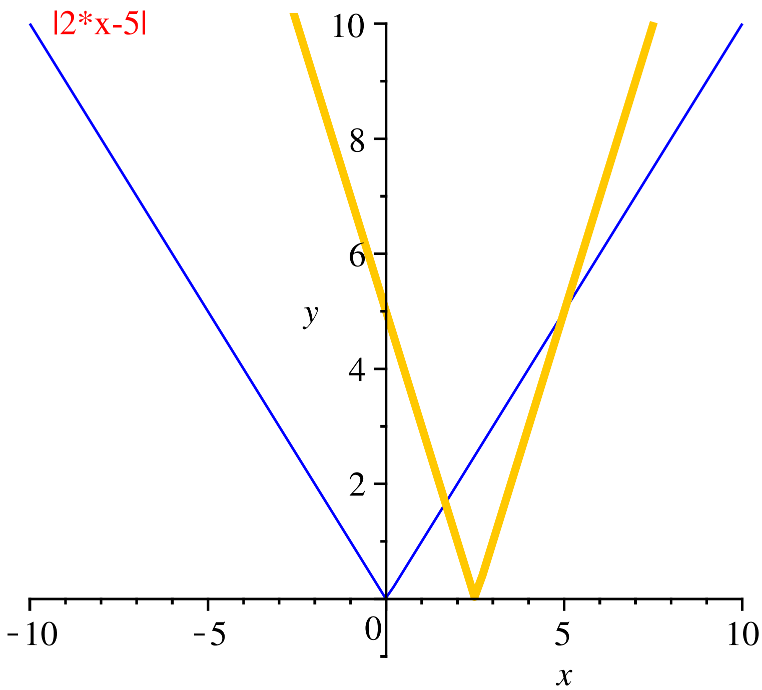
```
> restart;with(plots):
> f6:=x ->abs(x);
```

$$f6 := x \rightarrow |x|$$

```
> f7:=x -> abs(2*x-5);
```

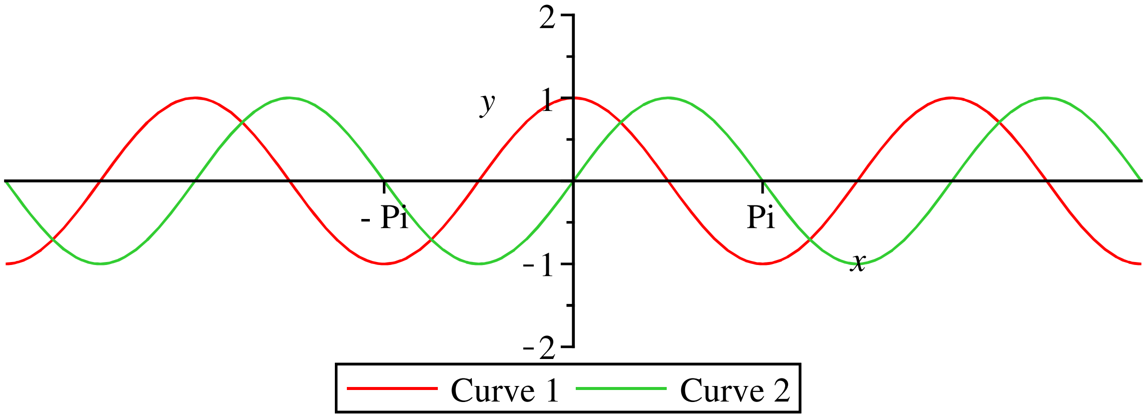
$$f7 := x \rightarrow |2\,x - 5|$$

```
> c1:=plot(f6(x),x=-10..10,y=-1..10,color=blue):
> c2:=plot(f7(x),x=-10..10,y=-1..10,color=pink,thickness=4):
> c3:=textplot([-8,10,"|2*x-5|"],color=red):
> display(c1,c2,c3);
```

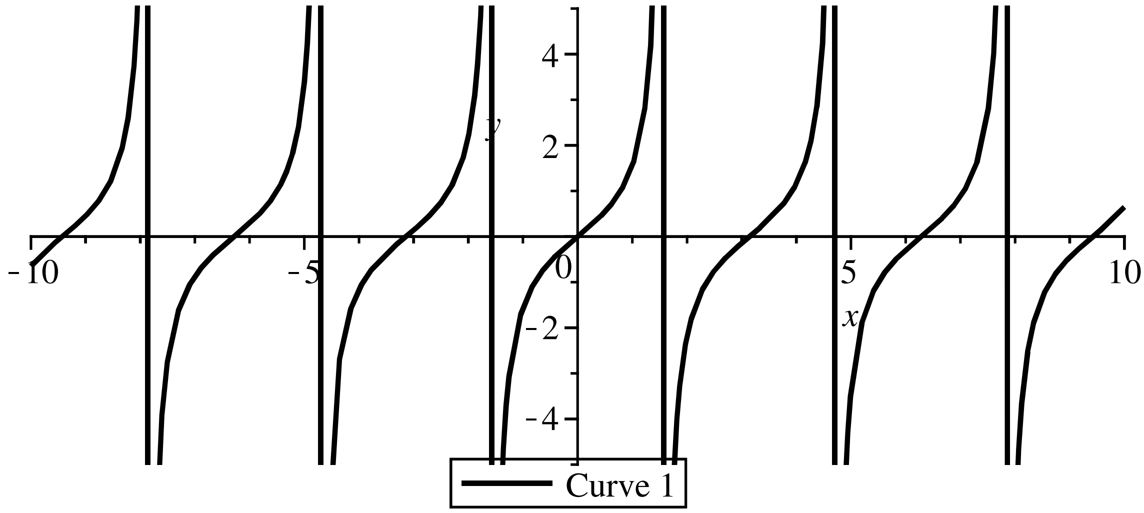


**Funções Trigonométricas**

```
> restart;with (plots):
> plot({cos(x),sin(x)},x=-3*Pi..3*Pi,y=-2..2,tickmarks=[[3.14="Pi",-3.14="-Pi"],default]);
```

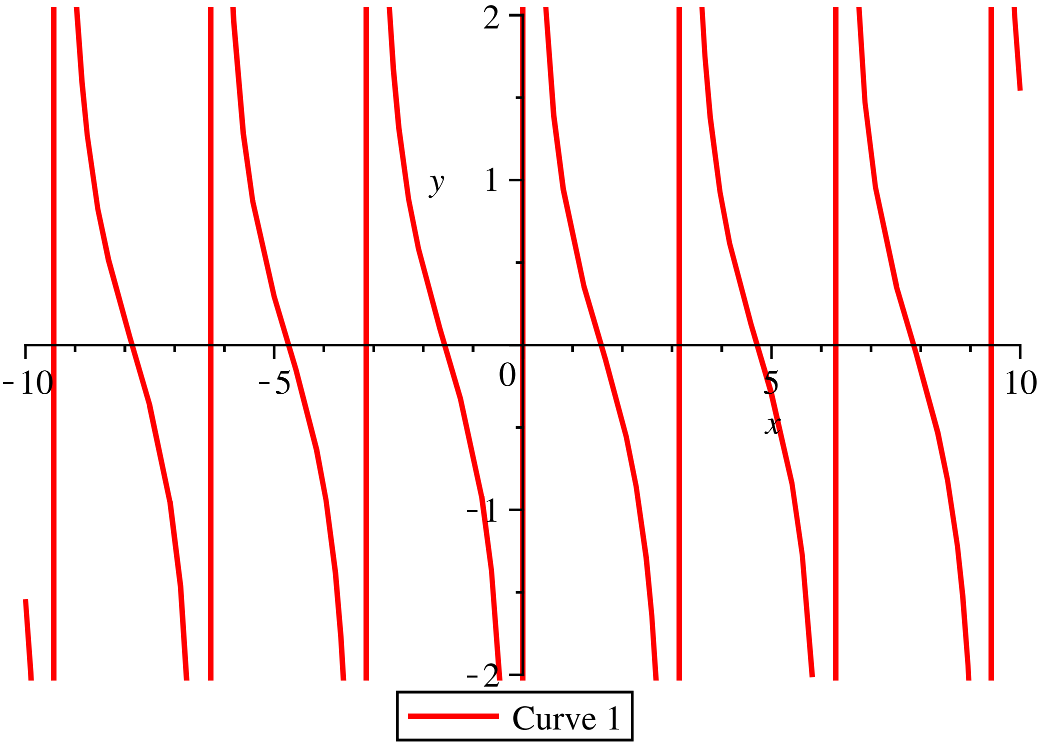



```
> plot(tan(x),x=-10..10,y=-5..5,color=black,thickness=2);
```



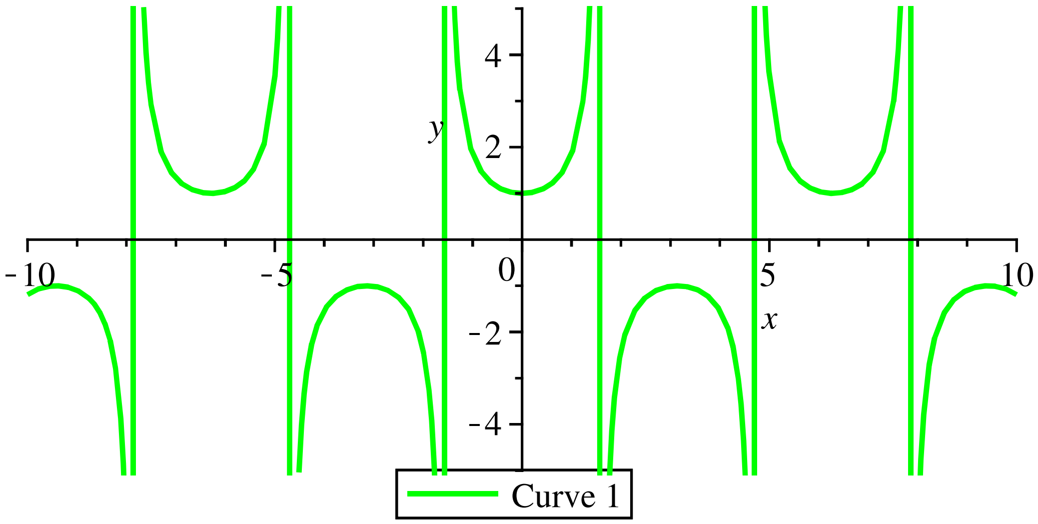

**FUNÇÃO COTANGENTE.**

> $plot(\cot(x)\ ,x=-10..10,y=-2..2,color=red,thickness=2);$




**FUNÇÃO SECANTE.**

> $plot(\sec(x), x = -10..10, y = -5..5, color = green, thickness = 2);$




**FUNÇÃO COSSECANTE.**

> $plot(\csc(x), x = -10..10, y = -5..5, color = gray, thickness = 2);$

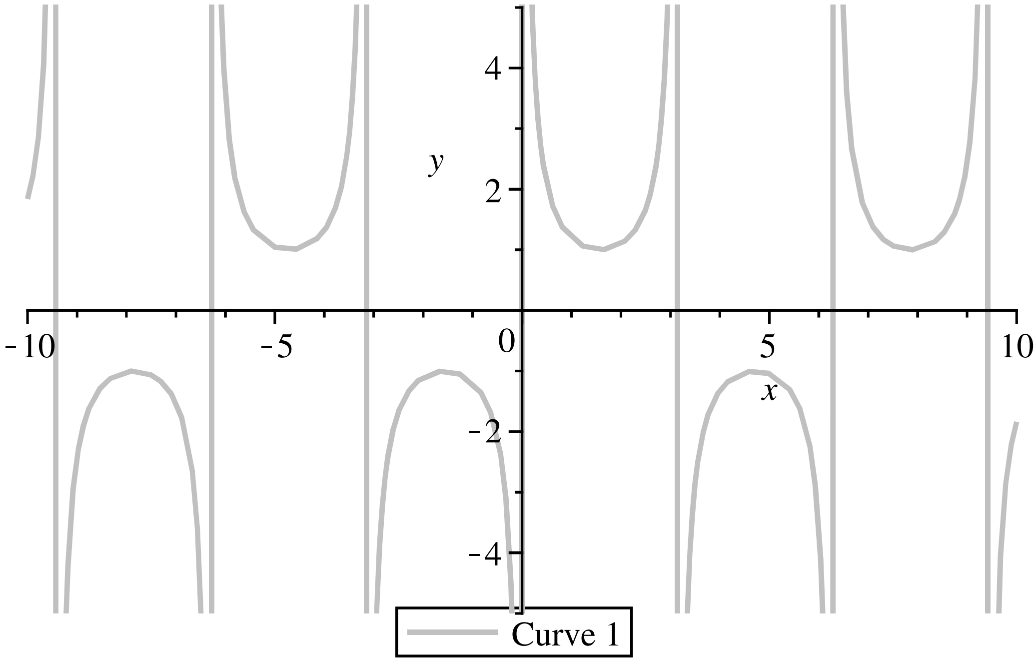
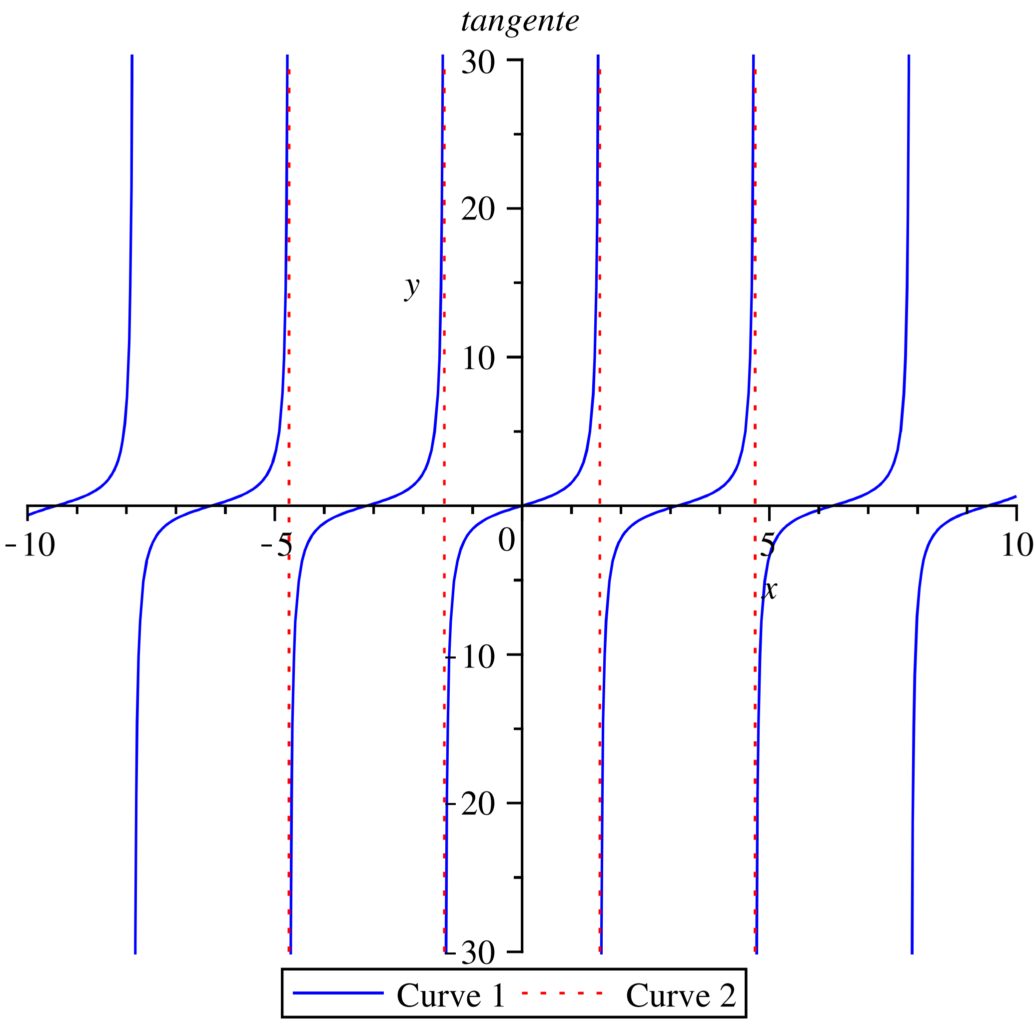



**GRÁFICO DAS FUNÇÕES COM ASSINTOTAS.**

> $c1 := plot(\tan(x), x = -10..10, y = -30..30, color = blue, discont = true, title = 'tangente')$ :

> $c2 := implicitplot(\{x = \mathrm{Pi}/2, x = -\mathrm{Pi}/2, x = 3 * \mathrm{Pi}/2, x = -3 * \mathrm{Pi}/2\}, x = -10..10, y = -30..30, linestyle = 2, color = red) : display(c1, c2);$




**Funções Hiperbólicas**

```
> f1:=x ->sinh(x);
```

$$f1 := x \rightarrow \sinh(x)$$

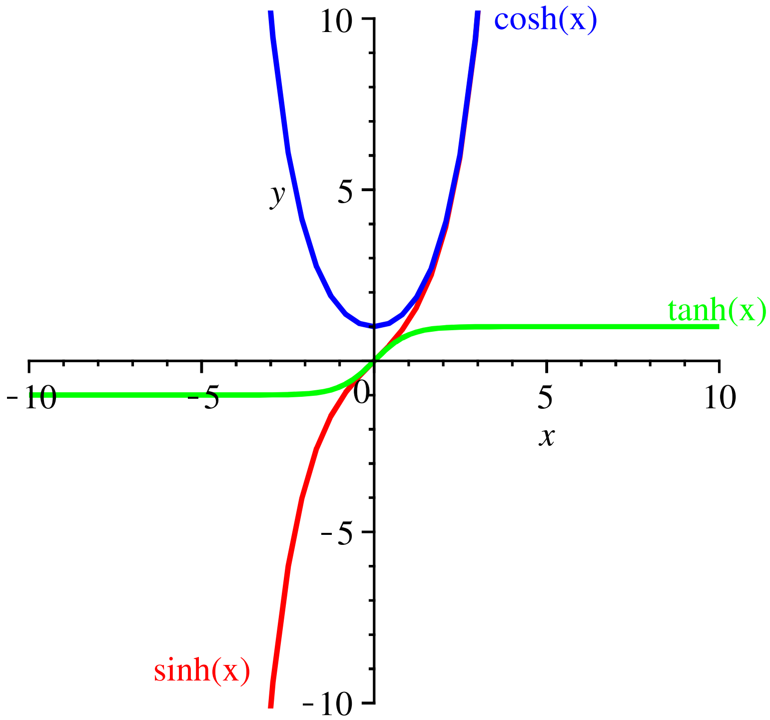
```
> f2:=x ->cosh(x);
```

$$f2 := x \rightarrow \cosh(x)$$

```
> f3:=x ->tanh(x);
```

$$f3 := x \rightarrow \tanh(x)$$

```
> c1:=plot(f1(x),x=-10..10,y=-10..10,color=red):
> t1:=textplot([-5,-9,"sinh(x)"],color=red):
> c2:=plot(f2(x),x=-10..10,y=-10..10,color=blue):
> t2:=textplot([5,10,"cosh(x)"],color=blue):
> c3:=plot(f3(x),x=-10..10,y=-10..10,color=green):
> t3:=textplot([10,1.5,"tanh(x)"],color=green):
> display(c1,c2,c3,t1,t2,t3,thickness=2);
```




**Função Logarítmica.**

```
> restart:with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> f:=x->log[a](x);
```

$$f := x \rightarrow \log_a(x)$$

```
> f1:=plot(subs(a=1/4,f(x)), x=-1..10, y=-10..10, color=blue):t1:=textplot([3,1,"log[1/4](x)"],color=blue):
> f2:=plot(subs(a=1/2,f(x)), x=-1..10, y=-10..10, color=green):t2:=textplot([2,2, "log[1/2](x)"],color=green):
> f3:=plot(subs(a=8/9,f(x)), x=-1..10, y=-10..10, color=red):t3:=textplot([3,-4, "log[8/9](x)"],color=red):
> display(f1,f2,f3,t1,t2,t3, thickness=2);
>
```

**Função Exponencial**

```
> f(x)=a^x;
```

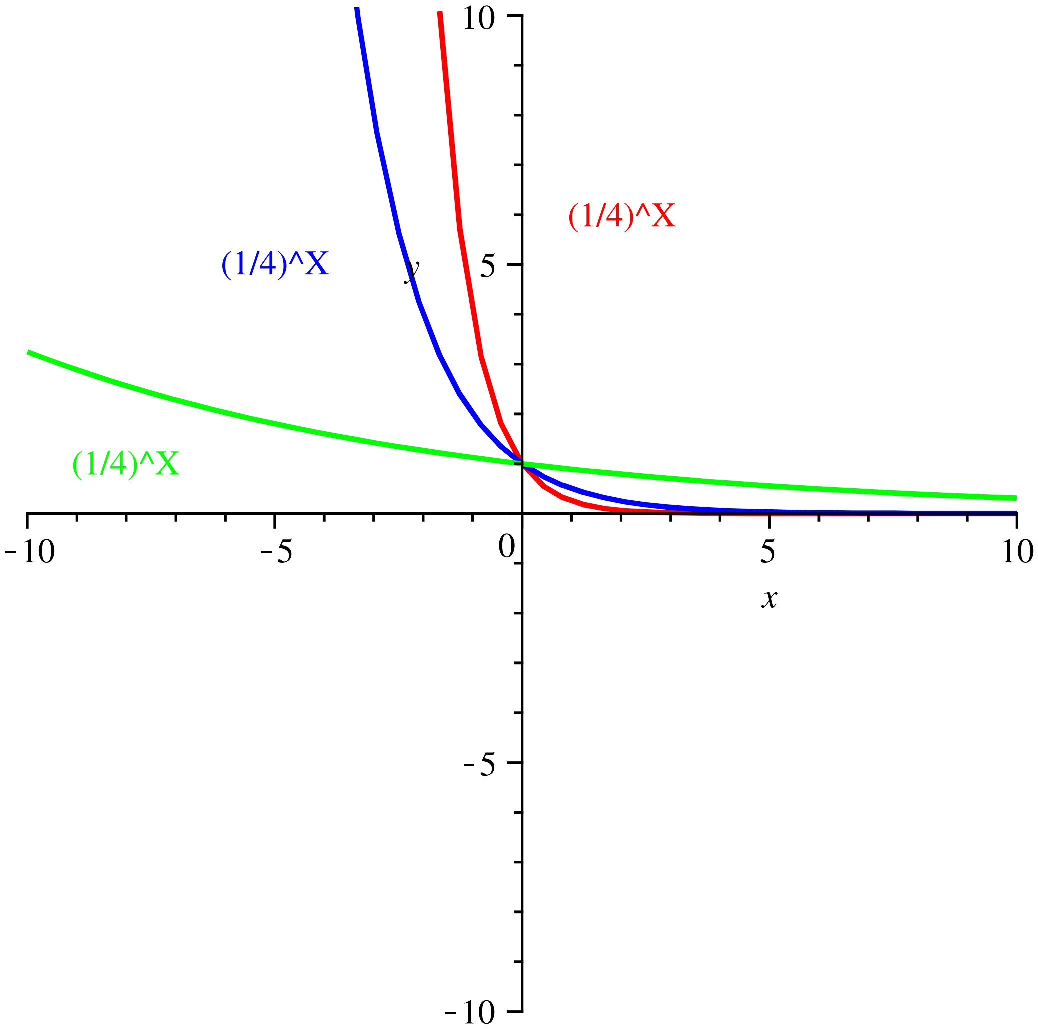
$$f(x) = a^x$$

```
> restart;with(plots):
```

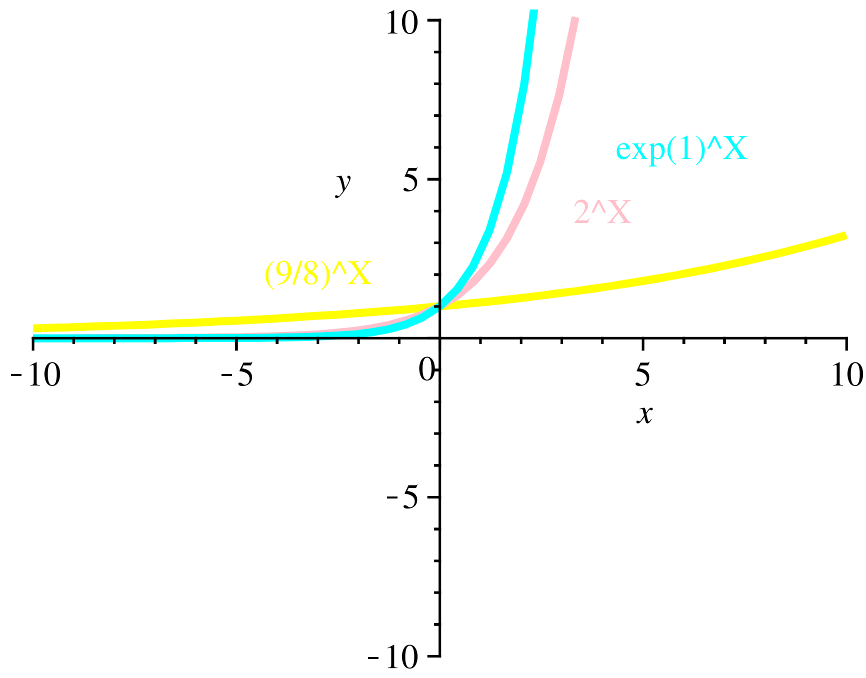
```
> f:=x -> a^x;
```

$$f := x \rightarrow a^x$$

```
> g1:=plot(subs(a=1/4,f(x)),x=-10..10,y=-10..10,color=red):
> t1:=textplot([2,6,"(1/4)^X"],color=red):
> g2:=plot(subs(a=1/2,f(x)),x=-10..10,y=-10..10,color=blue):
> t2:=textplot([-5,5,"(1/4)^X"],color=blue):
> g3:=plot(subs(a=8/9,f(x)),x=-10..10,y=-10..10,color=green):
> t3:=textplot([-8,1,"(1/4)^X"],color=green):
> display(g1,g2,g3,t1,t2,t3,thickness=2);
```




```
> g4:=plot(subs(a=9/8,f(x)),x=-10..10,y=-10..10,color=yellow):
> g5:=plot(subs(a=2,f(x)),x=-10..10,y=-10..10,color=pink):
> g6:=plot(subs(a=exp(1),f(x)),x=-10..10,y=-10..10,color=cyan):
> t4:=textplot([-3,2,"(9/8)^X"],color=yellow):
> t5:=textplot([4,4,"2^X"],color=pink):
> t6:=textplot([6,6,"exp(1)^X"],color=cyan):
> display(g4,g5,g6,t4,t5,t6,thickness=3);
```



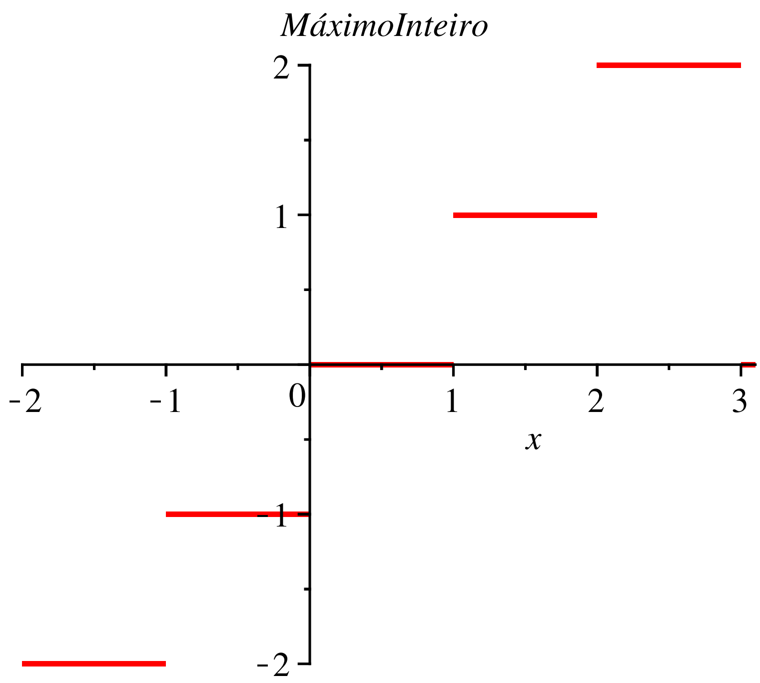

## Função Máximo Inteiro

f(x)=[|x|] =n, n<x<x+1 é uma função descontínua

> *restart*; *with*( *plots* ) :

> $f := piecewise(x \geq -2 \textbf{ and } x < -1, -2, x \geq -1 \textbf{ and } x < 0, -1, x \geq 0 \textbf{ and } x < 1, 0, x \geq 1 \textbf{ and } x < 2, 1, x \geq 2 \textbf{ and } x < 3, 2); plot(f(x), x = -2..3.1, discont = true, title = 'MáximoInteiro');$

$$f := \begin{cases} -2 & -2 \leq x \textbf{ and } x < -1 \\ -1 & -1 \leq x \textbf{ and } x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \textbf{ and } x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \textbf{ and } x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \textbf{ and } x < 3 \end{cases}$$




Operações com Funções

+ - * / ^ @ ( adição,subtração,produto,divisão,potenciação e composta respectivamente)

```
> restart:with(plots):
> f:=x -> x^2;
```

$$f := x \rightarrow x^2$$

```
> g:=x ->sqrt(x);
```

$$g := x \rightarrow \sqrt{x}$$

```
> f(x)+g(x);
```

$$x^2 + \sqrt{x}$$

```
> f(3)+g(3);# adição
```

$$9 + \sqrt{3}$$

```
> 2*f(x)^3;#produto por um escalar e potência
```

$$2\,x^6$$

```
> f(x)/g(x);#divisão
```

$$x^{3/2}$$

```
> (f@g)(x);#composta(fog)
```

$$x$$

```
> f(g(x));
```

$$x$$

```
> g(f(x));
```

$$\sqrt{x^2}$$

```
> h:=piecewise( x>=-1 and x<0,-1,x>=0 and x<1,1);
```

$$h := \begin{cases} -1 & -1 \leq x \text{ and } x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \text{ and } x < 1 \end{cases}$$

```
> k:=piecewise(x<=0,1,x>0,x^2);
```

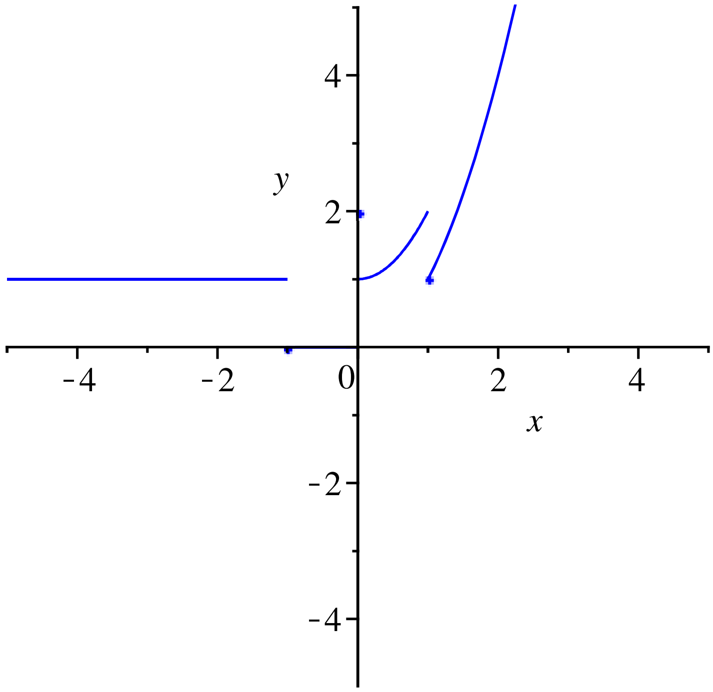
$$k := \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$

```
> h+k; simplify(%);
```

$$\left(\begin{cases} -1 & -1 \le x \text{ and } x < 0 \\ 1 & 0 \le x \text{ and } x < 1 \end{cases}\right) + \left(\begin{cases} 1 & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}\right)$$

$$\begin{cases} 1 & x < -1 \\ 0 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + x^2 & x < 1 \\ x^2 & 1 \le x \end{cases}$$

```
> plot(h+k,x=-5..5,y=-5..5,color=blue,discont=true);
```




Gráficos de Algumas Funções

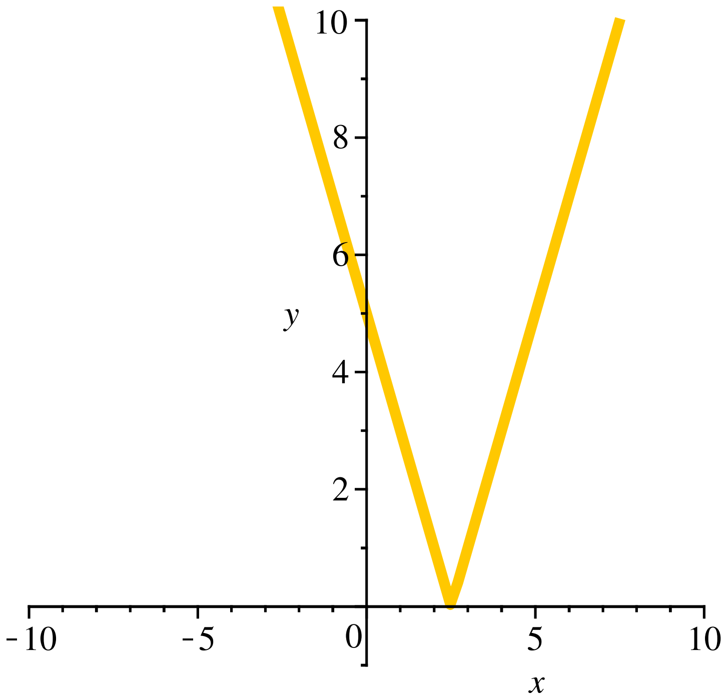
```
> restart;with(plots):
```

Dom(f1)=IR Im(f1)=[0,oo[ Raízes: x= 5/2 (contínua)

```
> f1:=x -> abs(2*x-5);
```

$$f1 := x \to |2\,x - 5|$$

```
> c1:=plot(f1(x),x=-10..10,y=-1..10,color=yellow,thickness=4):
> display(c1);
```

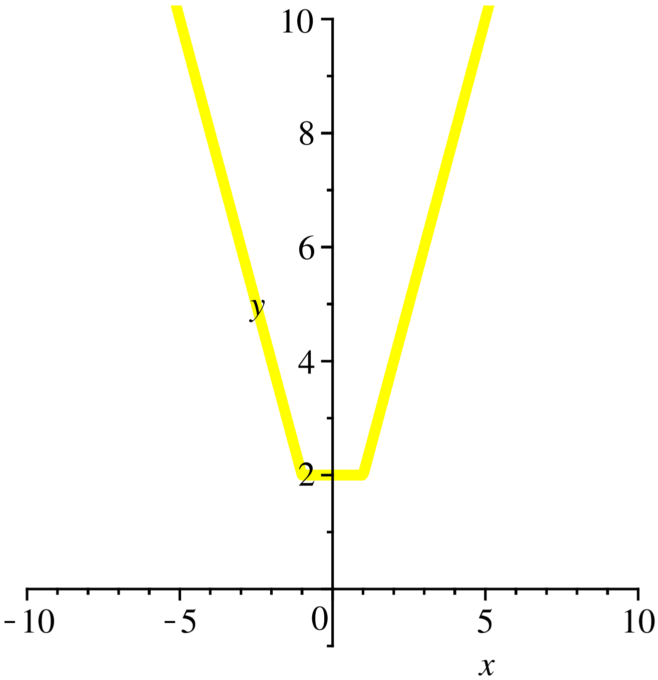



```
> f2:=x -> abs(x+1)+abs(x-1);
```

$$f2 := x \rightarrow |x+1| + |x-1|$$

Dom(f2)= IR Im(f2)=[2,oo[ Raízes: não existe (ela é contínua)

```
> c2:=plot(f2(x),x=-10..10,y=-1..10,color=yellow,thickness=4):
> display(c2);
```

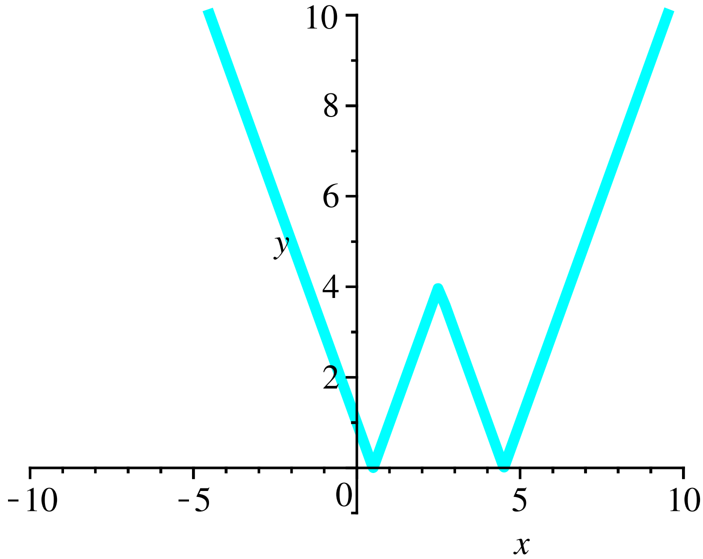



```
> f3:=x ->abs(f1(x)-4);
```

$$f3 := x \rightarrow |f1(x) - 4|$$

Dom(f3)= IR Im(f3)= [0,oo[ Raízes: ~0,5 e 4,5 (ela é contínua)

```
> c3:=plot(f3(x),x=-10..10,y=-1..10,color=cyan,thickness=4):
> display(c3);
```

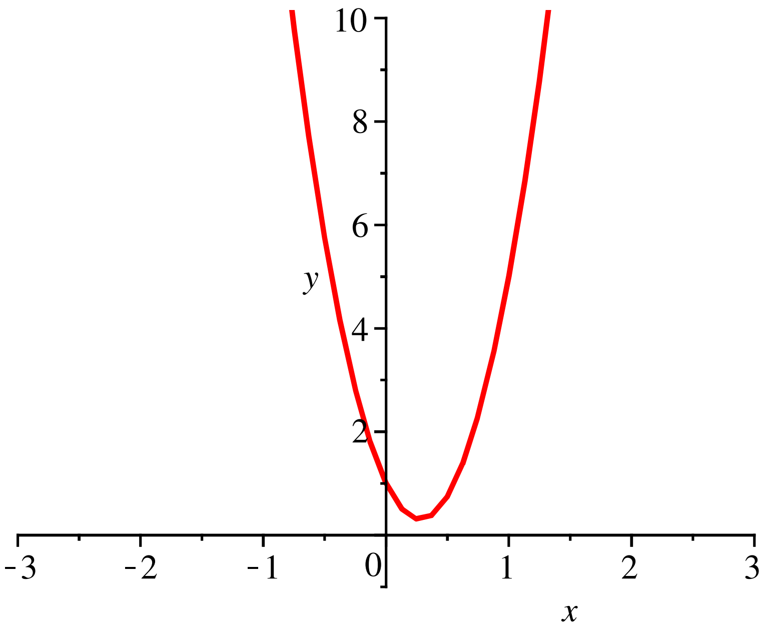



```
> f4:=p -> 9*x^2-5*x+1;
```

$$f4 := p \rightarrow 9\,x^2 - 5\,x + 1$$

Dom(f4)= IR     Im(f4)= ~0,25     Raízes: não existem     (Contínua)

```
> c4:=plot(f4(x),x=-3..3,y=-1..10,color=red,thickness=2):
> display(c4);
```

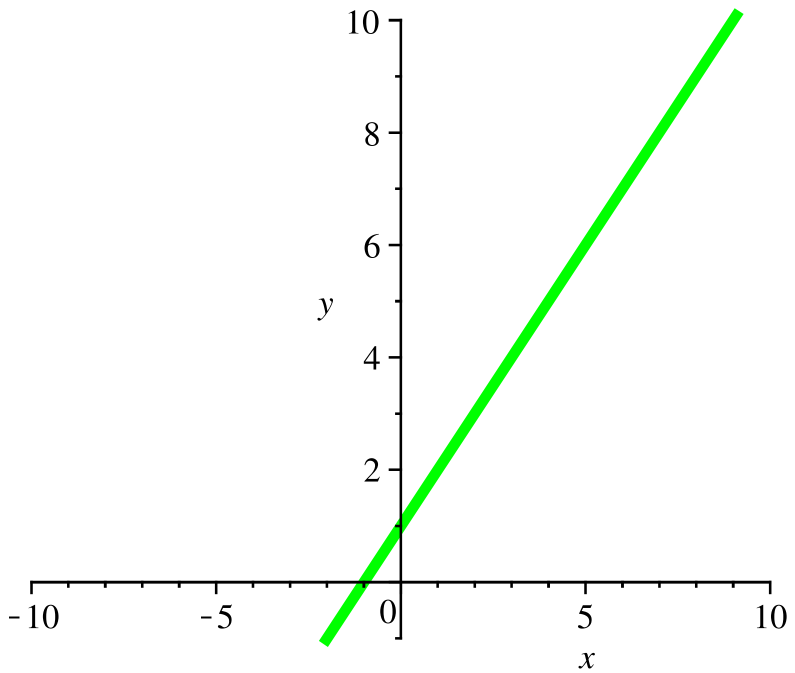



```
> f5:=q ->x+1;
```

$$f5 := q \rightarrow x + 1$$

Dom(f5)= IR  Im(f5)= IR  Raízes: -1     (Contínua)

```
> c5:=plot(f5(x),x=-10..10,y=-1..10,color=green,thickness=4):
> display(c5);
```

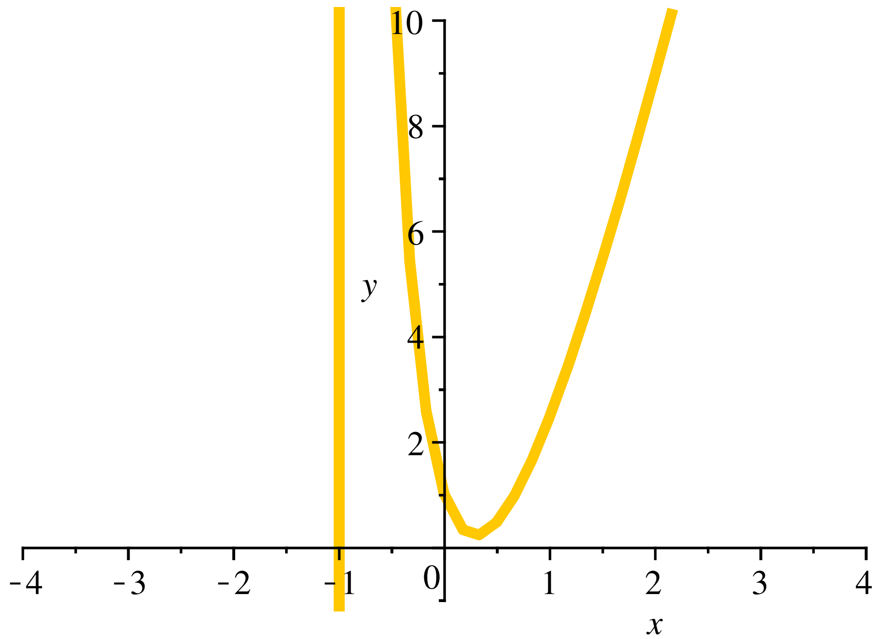



```
> f6:=w -> p/q;
```

$$f6 := w \rightarrow \frac{p}{q}$$

Dom(f6)= IR -{1}  Im(f6)= ~0.25  Raízes:  não existem  (descontínua)

```
> c6:=plot(f4(x)/f5(x),x=-4..4,y=-1..10,color=gray,thickness=4):
> display(c6);
```

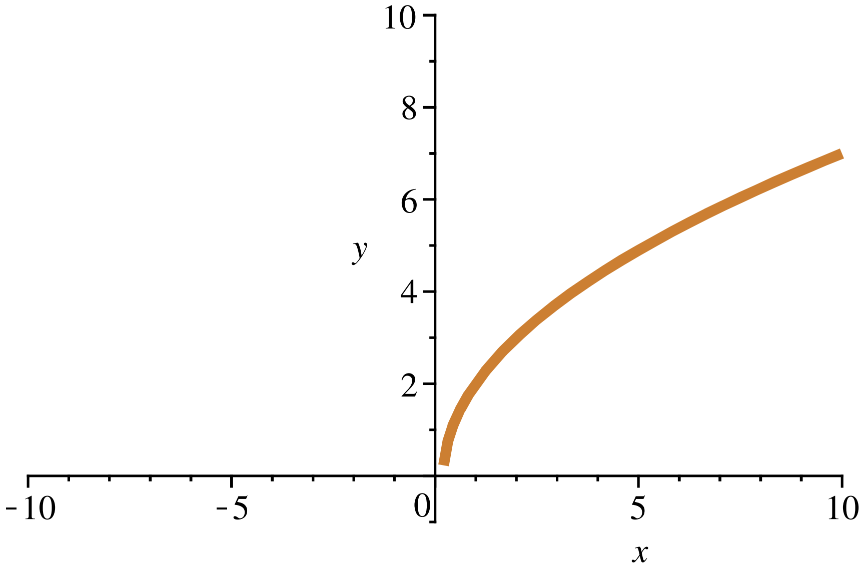



```
> f7:=x -> sqrt(5*x-1);
```

$$f7 := x \rightarrow \sqrt{5\,x - 1}$$

Dom(f7)= x>=1/5    Im(f6)= [0,oo[   Raízes: x=1/5  (é contínua)

```
> c7:=plot(f7(x),x=-10..10,y=-1..10,color=gold,thickness=4):
> display(c7);
```

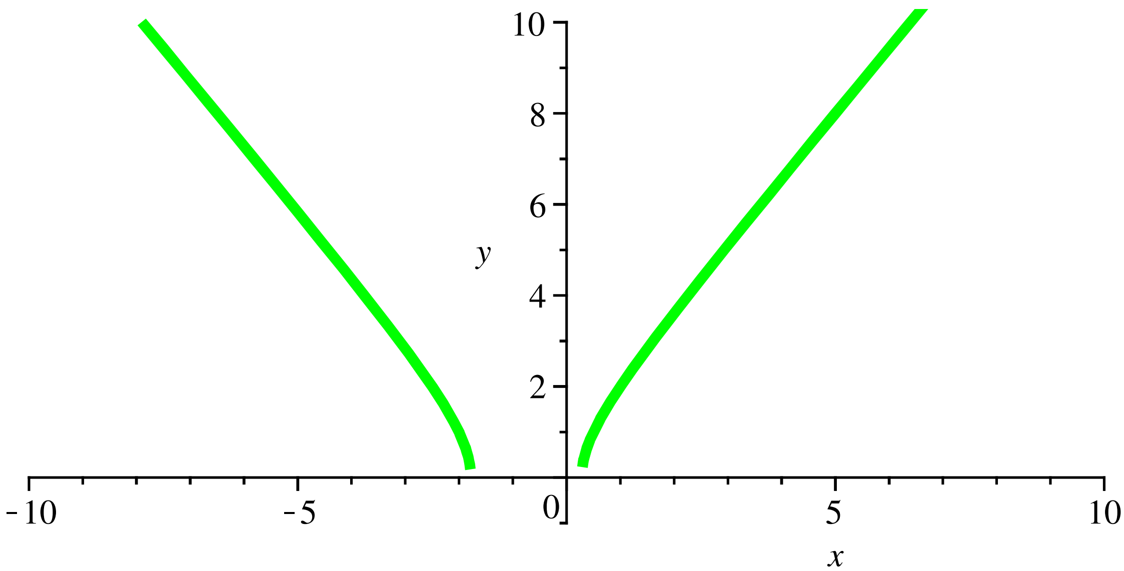



```
> f8:=x -> sqrt(2*x^2+3*x-1);
```

$$f8 := x \rightarrow \sqrt{2\,x^2 + 3\,x - 1}$$

Dom(f8)= Im(f8)= Raízes: (descontínua)

```
> c8:=plot(f8(x),x=-10..10,y=-1..10,color=green, thickness=4):
> display(c8);
```

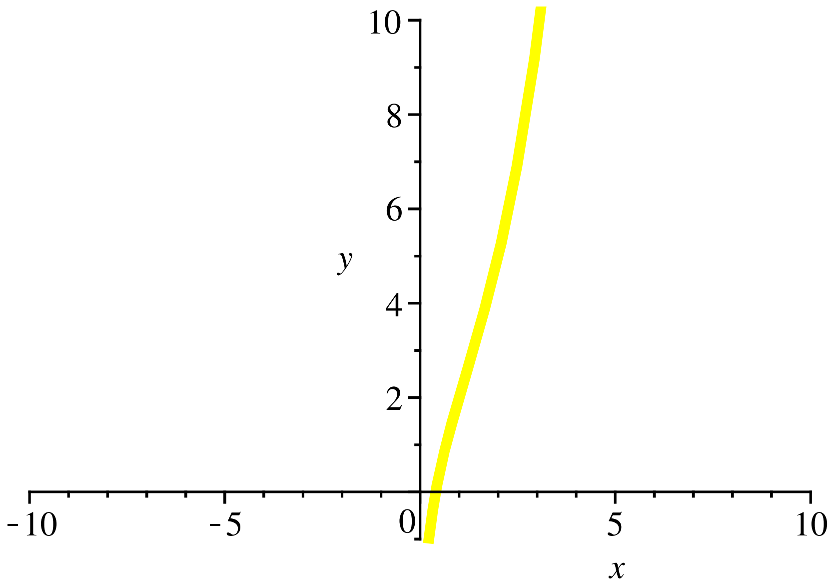



```
> f9:=x -> 2^x+log[2](x);
```

$$f9 := x \rightarrow 2^x + \log_2(x)$$

Dom(f9)= Im(f9)= Raízes: (descontínua)

```
> c9:=plot(f9(x),x=-10..10,y=-1..10,color=yellow,thickness=4):
> display(c9);
```

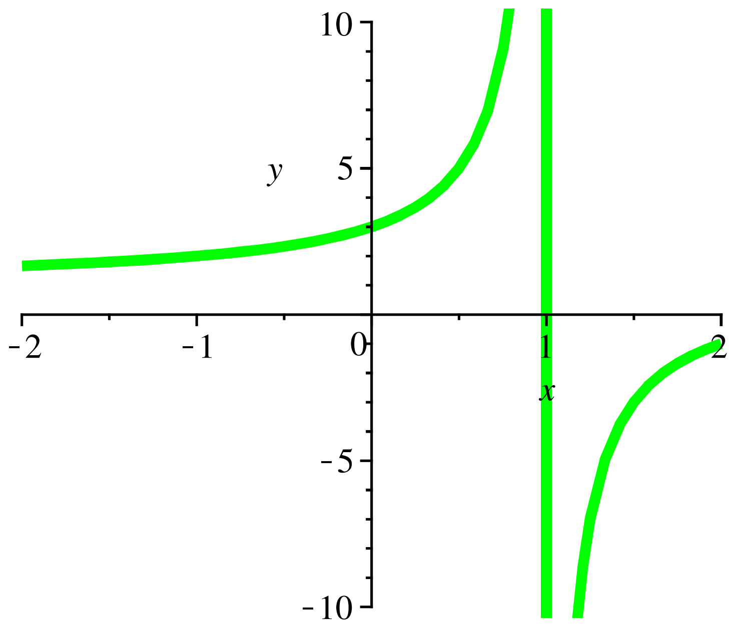



```
> f10:=x -> (x-3)/(x-1);
```

$$f10 := x \to \frac{x-3}{x-1}$$

Dom(f10)=R -{1} Im(f10)= R Raízes:{3} Descontinua em 1

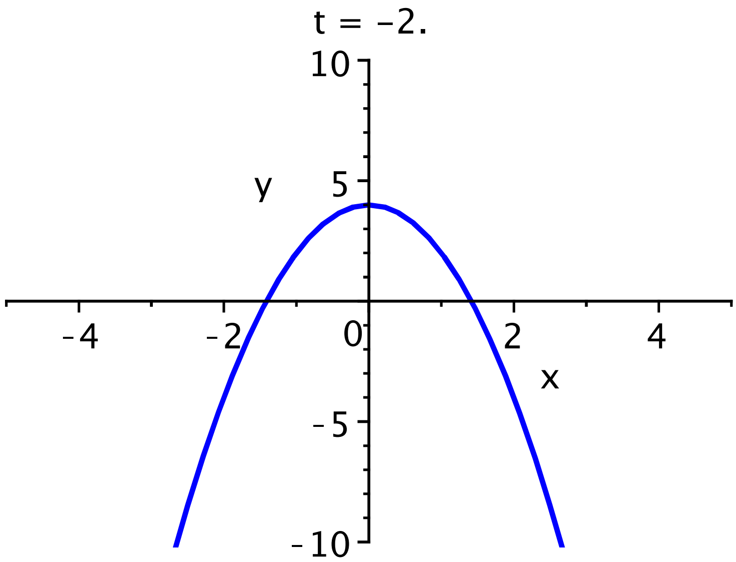
```
> c10:=plot(f10(x),x=-2..2,y=-10..10,color=green,thickness=4):
> display(c10);
```



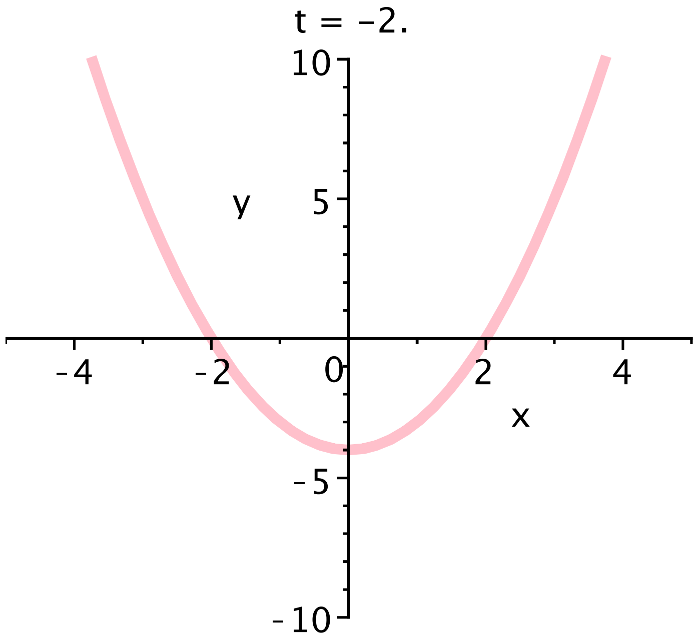

## Gráficos Animados

Podemos visualizar os gráficos de funções de uma maneira mais atrativa, para isso clique sobre a figura e observe o menú é muito parecido com um DVD, cique "play" e observe o que acontece!

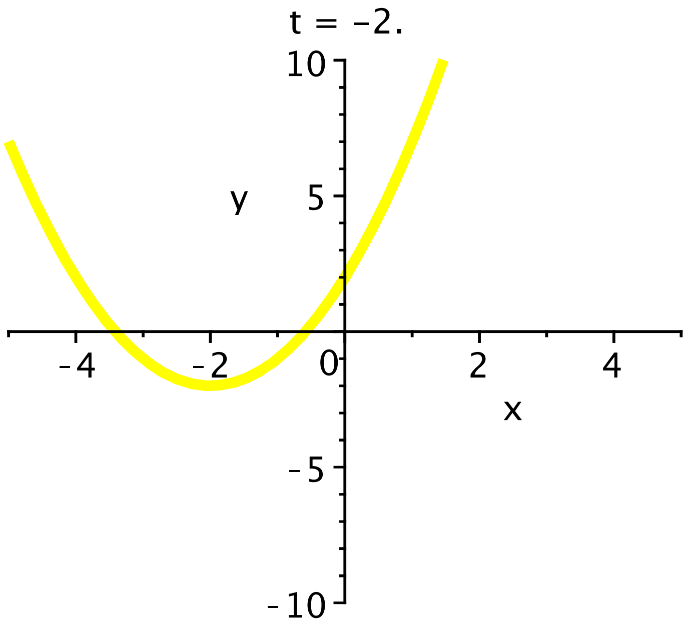
```
> restart;
> with(plots):
> animate(plot,[t*(x^2-2),x=-5..5,y=-10..10,color=blue],t=-2..2,thickness=2,
  frames=200);
```



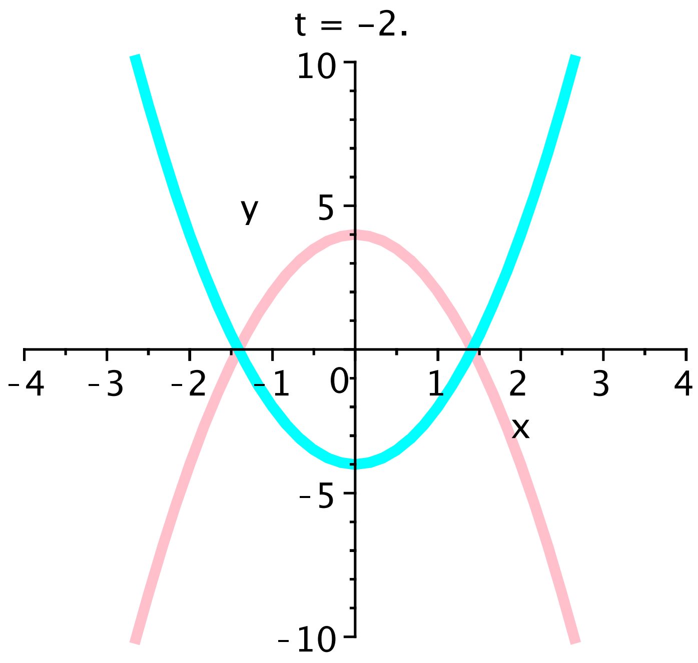

```
> animate(plot,[t+(x^2-2),x=-5..5,y=-10..10,color=pink],t=-2..2,thickness=4,
  frames=50);
```



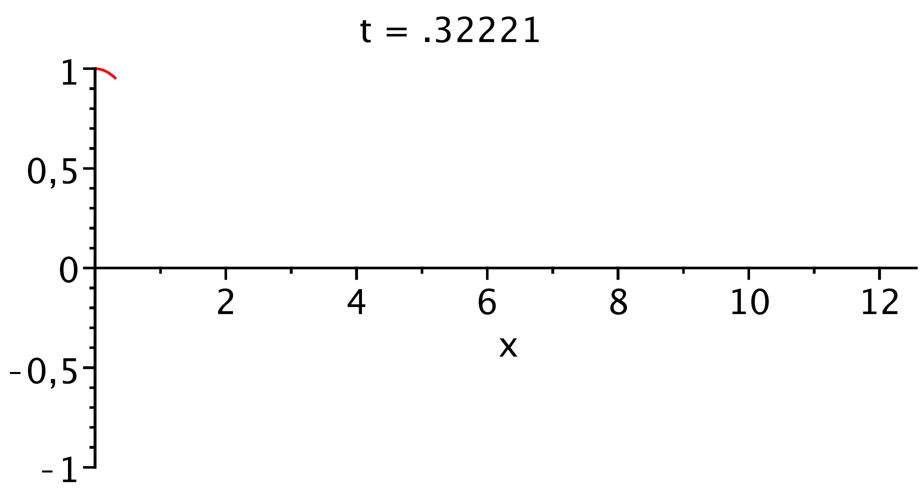

```
> animate(plot,[((x-t)^2)-2,x=-5..5,y=-10..10,color=yellow],t=-2..2,thickness=
  4,frames=50);
```




```
> animate(plot,[{t*(x^2-2),-t*(x^2-2)},x=-4..4,y=-10..10,color=[pink,cyan],
  thickness=4],t=-2..2,frames=50);
```

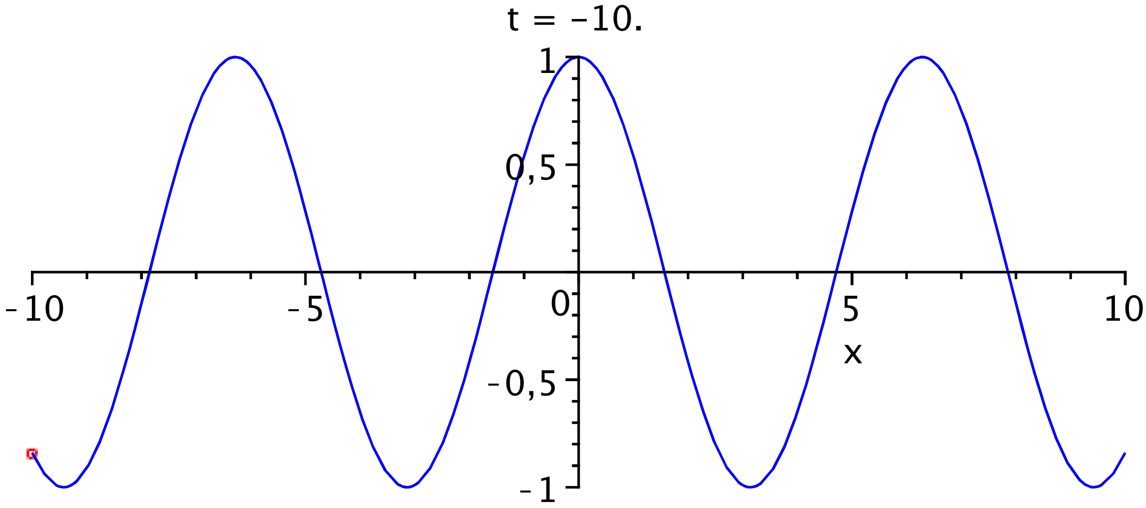



```
> animate(plot,[cos(x),x=-0..t],t=0..4*Pi,frames=40);
```




```
> restart;with(plots):
```

```
> c1:=plot(cos(x),x=-10..10,color=blue):
> animate(pointplot,[[t,cos(t)],symbol=circle,symbolsize=10,color=red],t=-10..10,frames=100,background=c1);
```



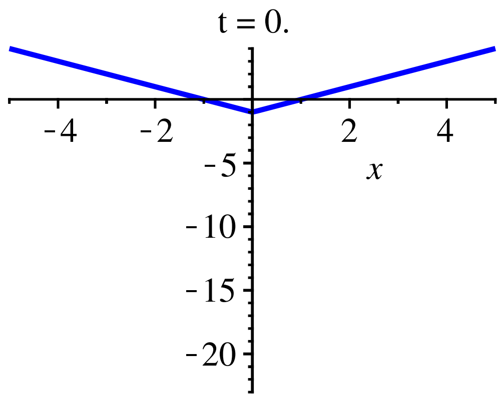

```
> restart;
> with(plots):
> f:= abs(x) -1;
```

$$f := |x| - 1$$

```
> g:=-x^2 +2;
```

$$g := -x^2 + 2$$

```
> animate(plot,[(1-t)*f + t*g,x=-5..5,color=blue],t=0..1,thickness=2,frames=20);
```




## Exercícios

### Exercício 1

*Determine a somas* :

> $seq1 := sum(\,(2 + 3 \cdot k), k = 0..n\,)$ :

> $seq2 := \dfrac{n\,(4 + 3 \cdot n)}{2}$ :

> $evalb(seq1 = seq2)$;

$$false \tag{27.1.1}$$

### Exercício 2

> $Sum(k^2, k=1..n); factor(sum(k^2, k=1..n));$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$\frac{1}{6} n (n+1) (2n+1) \quad (27.2.1)$$

> $Sum\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}, k=1..n\right); factor\left(sum\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}, k=1..n\right)\right);$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{n}{n+1} \quad (27.2.2)$$

> $Sum\left(\frac{1}{k^2}, k=1..\infty\right); factor\left(sum\left(\frac{1}{k^2}, k=1..\infty\right)\right);$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{6}\pi^2 \quad (27.2.3)$$

## Exercício 3

> $seq((2.1 + k\cdot 0.02), k=0..34);$

2.1, 2.12, 2.14, 2.16, 2.18, 2.20, 2.22, 2.24, 2.26, 2.28, 2.30, 2.32, 2.34, 2.36, 2.38, 2.40, 2.42, 2.44, 2.46, 2.48, 2.50, 2.52, 2.54, 2.56, 2.58, 2.60, 2.62, 2.64, 2.66, 2.68, 2.70, 2.72, 2.74, 2.76, 2.78 **(27.3.1)**

> $seq((0.8 - k\cdot 0.05), k=0..34);$

0.8, 0.75, 0.70, 0.65, 0.60, 0.55, 0.50, 0.45, 0.40, 0.35, 0.30, 0.25, 0.20, 0.15, 0.10, 0.05, 0., -0.05, -0.10, -0.15, -0.20, -0.25, -0.30, -0.35, -0.40, -0.45, -0.50, -0.55, -0.60, -0.65, -0.70, -0.75, -0.80, -0.85, -0.90 **(27.3.2)**

> $seq\left(\left(\frac{2^k}{5}\right), k=1..34\right);$

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \frac{32}{5}, \frac{64}{5}, \frac{128}{5}, \frac{256}{5}, \frac{512}{5}, \frac{1024}{5}, \frac{2048}{5}, \frac{4096}{5}, \frac{8192}{5}, \frac{16384}{5}, \frac{32768}{5}, \frac{65536}{5}, \frac{131072}{5}, \frac{262144}{5}, \frac{524288}{5}, \frac{1048576}{5}, \frac{2097152}{5}, \frac{4194304}{5}, \frac{8388608}{5}, \frac{16777216}{5}, \frac{33554432}{5}, \frac{67108864}{5}, \frac{134217728}{5}, \frac{268435456}{5}, \frac{536870912}{5}, \frac{1073741824}{5}, \frac{2147483648}{5}, \frac{4294967296}{5}, \frac{8589934592}{5}, \frac{17179869184}{5} \quad (27.3.3)$$

## Exercício 4

*converta para um número decimal*

> $\frac{9}{5.};$

$$1.800000000 \quad (27.4.1)$$

converta para uma fração

> convert(0.806, fraction);

$$\frac{403}{500} \quad (27.4.2)$$

> convert(0.676767, fraction);

$$\frac{20213}{29867} \quad (27.4.3)$$

Exercício 5

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right);$$

$$\frac{1}{2} \quad (27.5.1)$$

Exercício 6

Calcule

| Soma | 3,25 | 4,25 | -3,17 | 5,187 |
|---|---|---|---|---|
| 0,372 | | | | |
| 0,071 | | | | |
| -2,1592 | | | | |

> 0.372 + 3.25

$$3.622 \quad (27.6.1)$$

> 0.372 + 4.25

$$4.622 \quad (27.6.2)$$

> 0.372 + (-3.17)

$$-2.798 \quad (27.6.3)$$

> 0.372 + 5.187

$$5.559 \quad (27.6.4)$$

> 0.071 + 3.25

$$3.321 \quad (27.6.5)$$

> 0.071 + 4.25

$$4.321 \quad (27.6.6)$$

> 0.071 + (-3.17)

$$-3.099 \quad (27.6.7)$$

> 0.071 + 5.187

$$5.258 \quad (27.6.8)$$

> (-2.1592) + 3.25

$$1.0908 \quad (27.6.9)$$

> (-2.1592) + 4.25

$$2.0908 \quad (27.6.10)$$

> (-2.1592) + (-3.17)

$$-5.3292 \quad (27.6.11)$$

> (-2.1592) + 5.187

$$3.0278 \quad (27.6.12)$$

| Produto | 3,25 | 4,25 | -3,17 | 5,187 |
|---|---|---|---|---|
| 0,071 | | | | |
| -2,1592 | | | | |

```
> 0.071 · 3.25
```
$$0.23075 \tag{27.6.13}$$

```
> 0.071 · 4.25
```
$$0.30175 \tag{27.6.14}$$

```
> 0.071 · ( -3.17)
```
$$-0.22507 \tag{27.6.15}$$

```
> 0.071 ·5.187
```
$$0.368277 \tag{27.6.16}$$

```
> ( -2.1592) · 3.25
```
$$-7.017400 \tag{27.6.17}$$

```
> ( -2.1592) · 4.25
```
$$-9.176600 \tag{27.6.18}$$

```
> ( -2.1592) · ( -3.17)
```
$$6.844664 \tag{27.6.19}$$

```
> ( -2.1592)  · 5.187
```
$$-11.1997704 \tag{27.6.20}$$

```
>
```

**Exercícios Variados**

EXERCÍCIOS para resolver com ajuda do MAPLE

Os exercícios seguintes devem ser executados em ambiente Maple 9, devendo ser impressos após sua execução.

1) Criar uma lista de todos os pacotes que podem ser utilizados no Maple 9 para execução de comandos e resolução de problemas.
2) Calcular a expressão 123 + (25/3).
3) Atribuir o valor 12.34 à variável x e depois calcular x elevado à potência 3.
4) Definir uma lista chamada Marte contendo os valores 1.1, 2.2, 3.3, 4.4. Em seguida, calcular o valor do terceiro elementos da lista multiplicado por 3, sem alterar o terceiro elemento.
5) Definir uma matriz chamada M de 3 linhas e 2 colunas com todos os elementos iguais a zero usando o comando array(). Em seguida, colocar na linha 2 e coluna 2 de M o valor 1.
6) Definir uma lista chamada Urano com elementos 10, 11, 12, 13, usando o comando seq(). Em seguida, calcular o valor do terceiro elemento da lista multiplicado por 2, sem alterar a lista.
7) Definir uma expressão E como sendo x ao cubo somado com y ao quadrado, e depois substitu-ir x por 2 e y por 6 usando o comando subs().
8) Definir uma lista de 6 valores e calcular a sua soma. Em seguida, calcule apenas a soma dos elementos de índice ímpar.
9) Gerar uma lista de 4 números aleatórios entre 20 e 40, e invertê-la.
10) Definir um sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas tal que: o vetor b é [5.5, 6.6, 7.7] e a matriz é [[1.1, 2.2, 3.3],[4.4, 5.5, 6.6],[7.7, 8.8, 9.9]] e resolvê-la usando o comando linsolve() com 20 algarismos significativos.
11) Traçar um gráfico de x elevado ao cubo no intervalo de 1 a 12.
12) Traçar um gráfico 3D de x•cos(x) + y•cos(y) para x e y no intervalo de –π a +π.
13) Calcular o determinante e a inversa da matriz [[-1.1, 2.2, -3.3],[2.3, -3.4, 4.5],[-5.6, -6.7, -8.9]].
14) Resolver a seguinte equação: 3x +2 – 3x + 1 + 3x -2 + 3x -3 = 1494.
15) Fatorar a expressão a seguir: 42 x^3. y – 70 x^2.y - 6x +10.
16) Simplificar a expressão . $\dfrac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

18) Dada a função f(x) = x^6 – x^3 – 3x^2, encontrar f(-2), f(0), f(2).
19) Encontrar os intervalos que contêm as raízes das funções a seguir. Fazer uma representação gráfica:
f(x) = x^3 – x + 1 e g(x) = sen(x) – x^2 + 2.
20) Encontrar o mmc e o mdc da seguinte lista: 120, 450, 360, 830.
21) Decompor o número 462240.

22) Criar um número fracionário irracional mostrando as operações de potenciação e racionaliza-ção para esse número.
23) Resolver a seguinte equação em x:

$$x^3 - ½ax^2 + (13/3)x^2 = (13/6)ax + (10/3)x - (5/3)a$$

24) Resolver a seguinte inequação: x + y + 4/(x + y) < 10.
25) Determine o MDC dos inteiros 10 e 14:
26) Determine MDC (4, 10, 14, 60):
27) O máximo divisor de dois números é igual a 10 e o mínimo múltiplo comum deles é igual a 210. Se um deles é igual a 70, qual o outro?
28) Encontre um par ordenado (m,n) de números inteiros, que verifique a relação
MDC(180, 1200) = 180m + 1200n.
29) Desenvolva:

a) $(3x+y)^4$ b) $((1/2)+x^4)^4$ c) $((2x/3)+4y^5)^4$

d) $(2x+3y)^7$ e) $(x^4+(1/x^2))^3$ f) $((2x/3)+(4y/5)).((2x/3)-(4y/5))$

30) Efetue as multiplicações:
a) (x-2)(x-3) b) (x+5)(x-4)^4
31) Simplifique as expressões:
a) (x+y)^2–x^2-y^2 b) (x+2)(x-7)+(x-5)(x+3) c) (2x-y)^2-4x(x-y)
32) Calcule o valor numérico das expressões abaixo:
a ) [ – 18/13 + ( – 6 + 10 – 6) – 2] + [12 – 7 +(– 8 + 8)]
b) 17 – {14 – 21 + [– 12*8/51 – (7 – 10 – 1) – 4]} + 10
c) – 3 + 5{ – 3 + 5[– 3 + 5(– 3 + 5)]}
d) 3{– 1. 2 [5 – 3(– 1)]+ 10} + [5. 5 – 6(1 – 4)]

33) Simplifique os radicais abaixo:

a) $\sqrt{526}$ b) $\sqrt{52}$ c) $\sqrt{243}$ d) $\sqrt{90}$

34) Racionalize:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ c) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}+8}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$ e) $\dfrac{5}{\sqrt{7}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

35) Efetue as operações abaixo:

a) $(3ab-2a+4b)+(-3b+a-6ab)$
b) $(2xy-5x+y^2)-(3-2xy+x^3+3y^2)$
c) $(2xy-2x^2+5y)-3(xy-2x^2+y)$
d) $(-x^2+xy+4)-(2x^2-2xy+5)$
e) $(3x^2+2x-xy)+(3y-xy+x^2)-(2x^2-2xy)$
f) $(2a)(10a^3-18a^2+8a)$
g) $(-6y)(y^3+5y-1)$
h) $(x+y^3-3)(2-x)$
i) $(x-2)(x+y)$
j) $(x^2-3y)(x+3y)$
k) $(6x^3-4x^2+8)\div(2x)$
l) $(3x^3+6x^2-12)\div(-3x)$
m) $(5x^2y^3+4x^4y-3xy^2)\div(2xy)$
n) $(12x^3y^5-16x^4y^3+20x^5y^2)\div(4x^2y)$

36) Desenvolva:

a) $(x+2)^2$
b) $(5+3x)^2$
c) $(2x+5y)^2$

d) $\left(\sqrt{2}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$

e) $(x-5)^2$

f) $(4-2x)^2$

g) $(2x-3y)^2$

h) $\left(\dfrac{3-2x}{5}\right)^2$

i) $(x+5)(x-5)$

j) $(2x-1)(2x+1)$

k) $(2x-3y)(2x+3y)$

l) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

m) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

37) Resolva as equações

a) $-3x-5=25$

b) $2x-\dfrac{1}{2}=3$

c) $3x+24=-5x$

d) $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{5}=0$

e) $\dfrac{x}{2}+10=16$

f) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=10$

g) $4(x-2)+10=3(2+x)-7$

h) $\dfrac{x+1}{5}-\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{3-x}{3}$

i) $3x-\dfrac{4x-1}{5}=6-\dfrac{2-5x}{6}$

j) $2x+(x-3)+2=3x+5$

k) $x-\dfrac{5-x}{2}+1=\dfrac{3(x+1)}{2}-3$

l) $\dfrac{12-2x}{6}-\dfrac{18-4x}{3}=x+2$

38) Resolva as inequações

a) $2x-1\geq 9$

b) $2x-6>x+5$

c) $5-3x<x+1$

d) $-3(2x-2)+(x-1)<4$

e) $4(x-1)-3(x+1)>-10$

f) $10x-6(x-1)\geq 5(x+1)+7$

g) $x+10x-6\leq 13(x-2)$

h) $x-\dfrac{x-3}{2}>\dfrac{5x+7}{10}-\dfrac{5}{4}$

i) $\dfrac{x-1}{5}+2>x$

j) $\dfrac{5x+2}{3}-\dfrac{x-3}{2}\geq 1$

k) $2(4x-3)+3(3-2x)<2x+1$

39) Resolva as equações quadráticas:

a) $x^2=9$

b) $3x^2-12=0$

c) $3x^2+21x=0$

d) $24x-6x^2=0$

e) $\dfrac{x^2+2}{9}=3$

f) $x^2+5x+6=0$

g) $x^2-4x+4=0$

h) $\dfrac{x^2}{4}-4x=-16$

i) $2x^2-6x=4x-12$

j) $x^2+x=-1$

k) $x^2-\dfrac{9}{2}x+5=3(2x-5)$

l) $x^2-6x+10=0$

m) $2x^2-3x+1=0$

n) $(x-2)(x+3)=5x-10$

o) $(x+3)^2=16$

40) Resolvas os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 57 \\ x - y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 5x + 4y = 11 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x - 7y = 30 \end{cases}$

41) Luís e Maria resolveram comparar suas coleções de “compact disc” . Descobriram que têm ao todo 104 CDs e que se Maria tivesse 12 CDs a menos teria o triplo do número de CDs do Lu-ís. É possível afirmar que a quantidade de CDs que Luís possui?

42) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas por 4 pessoas, outras por apenas 2 pessoas num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por apenas duas pessoas?

43) Um aluno ganha 5 pontos por exercícios que acerta e perde 3 por exercício que erra. Ao fim de 50 exercícios, tinha 130 pontos. Quantos exercícios acertou?

44) Em um restaurante existem mesas de 3, 4 e 6 cadeiras num total de 16 mesas. Ocupando to-dos os lugares nas mesas de 3 e 4 cadeiras, 36 pessoas ficam perfeitamente acomodadas. Sabendo-se que o restaurante acomoda no máximo 72 pessoas, quantas mesas de cada tipo ( 3, 4 e 6) , respectivamente, existem?

45) Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia R$ 10,00 do clube e cada vez que ele errasse pagaria R$ 5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, ele recebeu R$ 50,00. Pode-se a-firmar que o número de arremessos convertidos pelo jogador?

46) Um copo cheio tem massa de 385g; com 2/3 de água tem massa de 310g. A massa do copo com 3/5 da água?

47) Num escritório de advocacia trabalhavam apenas dois advogados e um secretária. Como Dr. André e Dr. Carlos sempre advogam em causa s diferentes, a secretária, Cláudia, coloca um grampo em cada processo do Dr. André e dois grampos em cada processo do Dr. Carlos, para diferenciá-los facilmente no arquivo. Sabendo-se que ao todo são 78 processos, nos quais fo-ram usados 110 grampos, podemos concluir que o número de processos do Dr. Carlos é igual a. ..

48) Uma pessoa retira R$ 70,00 de um banco, recebendo 10 notas, algumas de R$ 10,00 e outras de R$ 5,00. Calcule quantas notas de R$ 5,00 a pessoa recebeu.

49) Numa lanchonete, 2 copos de refrigerantes e 3 coxinhas custam R$ 5,70. O preço de 3 copos de refrigerantes e 5 coxinhas é R$ 9,30. Nessas condições, é verdade que cada copo de refri-gerante custa:

50) Carlos e sua irmã Andréia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontra-ram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos superiores a 60kg. Assim eles se pesam dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

51) Sabendo-se que –3 é raiz de P(x)=x^3+4x^2-ax+1, calcular o valor de a.

52) Calcular m Î IR para que o polinômio
P(x)=(m2-1)x3+(m+1)x2-x+4 seja:
a) do 3ºgrau b) do 2º grau c) do 1º grau

53) Num polinômio P(x), do 3º grau, o coeficiente de x3 é 1. Se P(1)=P(2)=0 e P(3)=30, calcule o valor de P(-1).

54) Determinar o quociente de P(x)=x4+x3-7x2+9x-1 por D(x)=x^2+3x-2.

55) Qual é o termo em x5 no desenvolvimento de (x + 3)^8 ?

56) Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de (x - 3y)^7 .

57) Qual é o valor do produto dos coeficientes do 2o. e do penúltimo termo do desenvolvimento de (x - 1)^80 ?

58) FGV-SP - Desenvolvendo-se a expressão [(x + 1/x) . (x - 1/x)]^6 , obtém-se como termo inde-pendente de x o valor:

59) UF. VIÇOSA - A soma dos coeficientes do desenvolvimento de (2x + 3y)m é 625. O valor de m é:

60) MACK-SP - Os 3 primeiros coeficientes no desenvolvimento de (x2 + 1/(2x))n estão em progres-são aritmética.O valor de n é:
61) No desenvolvimento de (3x + 13)n há 13 termos. A soma dos coeficientes destes termos é igual a:
62) UFBA-92 - Sabendo-se que a soma dos coeficientes no desenvolvimento do binômio (a + b)m é igual a 256, calcule (m/2)!
63) UFBA-88 - Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de (x^2 + 1/x)^9.
Resp: O termo independente de x é o sétimo e é igual a 84.

64) Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binômio (3x - 1)^10.

65) Se A = {1, 2, 3,…, 17} e B = {17, 18, 19, 20,…}:
(i) A união B: (ii) A interseção B: (iii) A menos B:

66)

Sabe-se que $A \cup B \cup C = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 10\}$, $A \cap B = \{2, 3, 8\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$ e $A \cup B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 8\}$. O conjunto C é o da alternativa:

a) {9, 10}
b) {5, 6, 9, 10}
c) {2, 5, 6, 7, 9, 10)
d) {2, 5, 6, 7)
e) A união B

**Vantagens e desvantagens do Maple**

O uso de softwares na educação básica têm sido uma temática constantemente pensada por estudiosos. Este presente material tem como finalidade servir como recurso pedagógico para que professores da educação básica e profissionais interessados no assunto.
Uma das maiores dificuldades dos alunos do Ensino Médio no Brasil consiste em compreender conteúdos que envolva a matemática. Desta forma, simulações e animações são ferramentas pedagógicas de grande valia para o aumento da percepção do aluno, pois é a oportunidade de exercitar a escrita, a visão e a audição bem como melhorar a interação entre o professor e o aluno. Já que a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos (subsunçores) relevantes pré-existentes na estrutura cognitiva de quem aprende[1].
Portanto, a utilização de uma ferramenta computacional gera condições para o aluno desenvolver um conhecimento, antes limitado pela tecnologia do lápis e papel. Contudo, a inserção de softwares no ensino da matemática, como o maple, não deve ser realizada com o objetivo de findar a existências de aulas teóricas, mas que essas venham ser complementadas com o uso de softwares e outras tecnologias, que possam contribuir para o sucesso do ensino no Brasil ampliando a interação entre estudante-conhecimento - professor, utilizando recursos de tecnologias de informação (hipertextos e simulações interativas tipo applet-Java) e comunicação (plataforma de educação à distância com fórum de discussão, diário de bordo e correio eletrônico) como estímulo em atividades presenciais e, especialmente, à distância [2].
Ao manusear o computador, o estudante aprende a utilizar um instrumento de cálculo, que aprimora a resolução de problemas ou questões a partir de modelos já feitos; aprimora a buscar por informações e a trabalhar com ela e faz uso correto da linguagem. Além disso, terão novas ferramentas para a resolução de problemas e, concomitantemente, entusiasmo para aprender.
Dessa forma, a modelagem matemática é de fundamental importância, pois, sendo o processo em que se estabelecem relações entre as entidades de um sistema, a modelagem proporciona a construção, manipulação e representação de modelos dinâmicos quantitativos matematicamente de modo que estes modelos possam ser analisados de forma mais clara e concisa.
Embora as simulações virtuais não devam substituir por completo a realidade que representam, elas são bastante úteis para abordar experiências difíceis ou impossíveis de realizar na prática (por serem muito caras, muito perigosas, demasiado lentas, demasiado rápidas, etc.). Quando se revestem de um caráter de "jogo", as simulações fornecem uma recompensa pela realização de certo objetivo. [3]
Os programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o "pensar matematicamente", ou seja, os alunos fazem experimentos, testam

hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. [4]
Diante de tudo o que foi analisado até aqui, é pertinente destacar que o uso de softwares educacionais, não constitui a solução de todos os problemas do ensino das ciências exatas. O uso de tecnologias tem limitações que devem ser levadas em consideração.
É necessário bom senso no uso das tecnologias, pois o seu uso irresponsável pode aniquilar habilidades e conhecimentos importantes na formação do estudante.
Por isso, na elaboração de simulações computacionais, uma atenção especial deveria ser lançada à modelagem que lhe dá suporte.
Contudo, se o computador for introduzido nas escolas sem que haja mudanças estruturais nos métodos de ensino, no treinamento e nas expectativas dos professores e na própria estrutura administrativa da escola, o poder educacional dessas máquinas será bastante reduzido.
Computadores podem ser usados para melhorar a produtividade, para ensinar habilidades básicas que envolvam prática, para fornecer alternativas aos livros didáticos e para deixar os professores mais livres e, assim, poderem ensinar aos seus estudantes a resolverem problemas específicos.

## Conclusões

Investir na relação Informática e Educação Matemática significa participar do processo de transformação a que a escola está passando em conseqüência da crescente presença de computadores nas instituições de ensino.
Vimos também que quando o computador é usado por professores e alunos de forma responsável, ou seja, com fins educacionais torna-se um instrumento de aprendizagem que irá desempenhar tarefas e também contribuirá para um desenvolvimento das relações entre professor e alunos em torno do saber matemático.
O professor precisa estar imbuído da necessidade do saber específico da sua área, mas deve atentar para sua abordagem didática, sair do centro e transmissor de conhecimentos para se tornar um facilitador, um estudante pronto a romper e a lançar desafios.
Esperamos que este artigo possa ajudar na difusão desta temática no âmbito nacional e que possa servir para que educadores e outros profissionais interessados no assunto utilizem este artigo como fonte de pesquisa e aplicação.
Contudo, é importante reafirmar que esse recurso didático não substitui o convencional, mas deve ser usado como auxílio no ensino da física, a fim de tornar as aulas mais ricas e interessantes e que o aprendizado seja efetivo para todos, pois acrescenta outras situações para que o aluno explore os conteúdos em questão.
Neste artigo, foram levadas em conta as dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos alunos de física, e foi proposto o uso de softwares como ferramenta de superação das mesmas. Porém, o material instrucional apresentado no presente artigo por si só não garante bons resultados, por isto, além de apresentar o material, foi exposto uma estratégia de ensino a ser adotada.

## Agradecimentos

Agradeçemos primeiramente a Deus, à professora Rosa pela oportunidade de desenvolver o presente trabalho,
À Universidade Estadual do Rio de Janeiro - Faculdade de Formação de Professores, pela infra-estrutura fornecida durante a realização deste trabalho. E agradecemos em forma especial aos técnicos da Faculdade de Formação de Professores, pela colaboração e mantenção do laboratório de informática e pela divulgação do mesmo.

## Referências Bibliográficas

[1] Moreira, M. A.; Masini, E. F. S. *Aprendizagem Significativa.* São Paulo: Editora Centauro, (2002).

[2] Pires, Marcelo Antonio; Veit, e Eliane Ângela. *Tecnologias de Informação e Comunicação para ampliar e motivar o aprendizado de Física no Ensino Médio* - Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 28, n. 2, p. 241 - 248, (2006).

[3] Carlos Fiolhais; e Jorge Trindade, *Física no Computador: o Computador como uma Ferramenta no Ensino e na Aprendizagem das Ciências Físicas,* Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 25, no. 3, Setembro, (2003).

[4] *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica.* – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, (2006)-(Orientações Curriculares para o Ensino Médio; volume 2).

[5] Lenimar Nunes de Andrade, *Introduçao a Computação Algébrica com o Maple*. Sociedade Brasileira de Matemática. (2004).

[6] Mariani Vivian Cocco, Maple - *Fundamentos e Aplicações.* Editora LTC (2004)

[7] Apostila: Maple no ensino Básico, elaborada pela turma 2008:

**Alunos Colaboradores da 1a edição**:(Turma 2007)

Anderson Velasco de Oliveira: - *dudu_velasco@yahoo.com.br*
Ariene de Nazareth Barcelos - ariene.barcelos@gmail.com
Christiane Barbosa da Silva- *ch.sil.2007@hotmail.com*
Douglas Ribeiro Souza- *douguerj@yahoo.com.br*
Felipe Pereira do Carmo *felcarmo@yahoo.com.br*
Flavio Menezes de Andrade
Iber de Souza Rebello- *iberrbello@gmail.com*
Jorge Aguiar Marques Selli Filho
Karla Garcia Bezerra - *karlinhakgb@hotmail.com*
Luciano Vicente Lima- luciano.vicentelima@gmail.com
Marcos Costa Roboredo - *mcr.marcos@yahoo.com.br*
Rafael da Silva Costa: *rafael_math@yahoo.com.br*
Rodolfo da Costa Neves rodolfocneves@ig.com.br
Rubens de Lima Miranda miranda.rub@gmail.com
Thais Aresta de Mattos *thaisaresta@ig.com.br*
Thiago Leal da Silva - *thiagoleal@ig.com.br*